

Skript zur Vorlesung

Mathematik A

Wintersemester 2020/2021

Christian Wyss, 30. November 2022

basierend auf dem Vorlesungsskript vom Wintersemester
2015/2016

ursprüngliche L^AT_EX-Version von Johannes Bahr

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeine Grundlagen	7
1.1	Mengen	7
1.2	Logische Symbole	10
1.3	Produkte von Mengen	11
1.4	Intervalle	11
1.5	Rechnen mit Ungleichungen	13
1.6	Der Betrag	16
1.7	Fakultät und Binomialkoeffizient	20
1.8	Allgemeiner binomischer Satz	21
2	Reelle Funktionen	23
2.1	Die Funktionsdefinition	23
2.2	Verkettung von Funktionen	25
2.3	Die Umkehrfunktion	27
2.4	Injektiv, surjektiv und bijektiv	29
2.5	Symmetrie	32
2.6	Monotonie	33
3	Trigonometrische Funktionen	37
3.1	Winkel im Bogenmaß	37
3.2	Sinus und Cosinus	38
3.3	Eigenschaften von Sinus und Cosinus	40
3.4	Tangens und Cotangens	43
3.5	Arcusfunktionen	45
3.6	Polarkoordinaten	47
4	Exponential- und Logarithmusfunktion	51
4.1	Allgemeine Potenzen	51
4.2	Die Exponentialfunktion	52
4.3	Der Logarithmus	53
5	Komplexe Zahlen	57
5.1	Definition komplexer Zahlen	57
5.2	Rechen mit komplexen Zahlen	59
5.3	Kehrwert und Quotient	61
5.4	Lösung quadratischer Gleichungen	62
5.5	Polarform komplexer Zahlen	65
5.6	Produkte und Potenzen in Polarform	69
5.7	Komplexe Wurzeln in Polarform	70

6	Der Gaußalgorithmus	73
6.1	Lineare Gleichungssysteme	73
6.2	Elementare Zeilenumformungen	74
6.3	Der allgemeine Gaußalgorithmus	76
6.4	Komplexe lineare Gleichungssysteme	80
7	Vektorrechnung im Anschauungsraum	81
7.1	Vektoren im \mathbb{R}^n und Koordinatensysteme	81
7.2	Addition von Vektoren	84
7.3	Multiplikation mit Skalar	87
7.4	Der Betrag eines Vektors	89
7.5	Einheitsvektoren	91
7.6	Das Skalarprodukt	92
7.7	Winkel zwischen zwei Vektoren	95
7.8	Orthogonale Zerlegung von Vektoren	96
7.9	Das Vektorprodukt	99
7.10	Orientierung und Vektorprodukt	100
7.11	Vektorprodukt und Flächeninhalt	102
7.12	Das Spatprodukt	103
8	Geraden und Ebenen im Raum	107
8.1	Parameterdarstellung von Geraden	107
8.2	Gerade gegeben durch zwei Punkte	109
8.3	Parameterdarstellung von Ebenen	109
8.4	Normalenform von Ebenen	111
9	Matrizen	115
9.1	Matrizen und das Matrix-Vektor-Produkt	115
9.2	Der Kern einer Matrix	117
9.3	Matrizenrechnung	119
9.4	Die transponierte Matrix	121
9.5	Matrixmultiplikation	121
9.6	Die inverse Matrix	126
9.7	Berechnung der inversen Matrix	129
9.8	Elementarmatrizen	132
10	Determinanten	135
10.1	Zweireihige Determinanten	135
10.2	n -reihige Determinanten	136
10.3	Dreireihige Determinanten	138
10.4	Eigenschaften und Berechnung	139
10.5	Anwendungen der Determinante	147
11	Grenzwerte und Stetigkeit	151
11.1	Der Grenzwert einer Funktion	151
11.2	Rechenregeln für Grenzwerte	153
11.3	Stetigkeit	156
11.4	Grenzwerte und Unendlich	157
11.5	Anwendung der Stetigkeit: Nullstellen	159

12 Polynome und rationale Funktionen	163
12.1 Polynome, Polynomdivision	163
12.2 Nullstellen von Polynomen	166
12.3 Bestimmung von Nullstellen	169
12.4 Horner-Schema	170
12.5 Existenz reeller Nullstellen	172
12.6 Rationale Funktionen	172
13 Differentialrechnung	177
13.1 Die Ableitung einer Funktion	177
13.2 Die Ableitung als Tangentensteigung	179
13.3 Ableitungsregeln	180
13.4 Ableitungen elementarer Funktionen	183
13.5 Einseitige Ableitungen	186
13.6 Zeitableitungen	188
13.7 Höhere Ableitungen	189
14 Anwendungen der Differentialrechnung	191
14.1 Extremwerte	191
14.2 Monotonie	193
14.3 Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema	194
14.4 Berechnung globaler Extrema	198
14.5 Krümmung und Wendepunkte	199
14.6 Kurvendiskussion	201
14.7 Der Satz von l'Hospital	201
14.8 Das Newtonverfahren	204
15 Integralrechnung	209
15.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral	209
15.2 Das bestimmte Integral	212
15.3 Der Hauptsatz	214
15.4 Integrale und Flächeninhalt	217
15.5 Integrale stückweise definierter Funktionen	221
15.6 Partielle Integration	222
15.7 Substitutionsregel	225
15.8 Alternative Anwendung der Substitution	229
15.9 Integration bei Symmetrien	231
15.10 Integration rationaler Funktionen	233
15.11 Uneigentliche Integrale	238
15.12 Numerische Integration	241
16 Allgemeine Vektorräume	243
16.1 Definition des Vektorraums	243
16.2 Untervektorräume	246
16.3 Lineare Hülle	247
16.4 Erzeugendensysteme	249
16.5 Lineare Unabhängigkeit	254
16.6 Basis und Dimension	260
16.7 Untervektorräume und Dimension	265
16.8 Orthonormalbasen	268

16.9	Gram-Schmidt-Verfahren	271
17	Der Rang einer Matrix	275
17.1	Zeilenrang und Spaltenrang	275
17.2	Der Rangsatz	277

Kapitel 1

Allgemeine Grundlagen

Im ersten Kapitel befassen wir uns mit grundlegenden mathematischen Notationen und Techniken. Es geht hier zunächst vor allem um die Frage: Wie schreiben wir eine mathematische Aussage korrekt auf, das heißt so, dass die Aussage auch für andere Leser eindeutig klar wird? In der Mathematik benutzt man dazu die Schreibweise mit Mengen sowie logische Symbole. Etwas philosophischer gesagt lernen wir also im ersten Kapitel die Sprache der Mathematik kennen: Logik und Mengenlehre.

Hinweis: In den alten Mathematik A&B Skripten finden sie den Stoff dieses Kapitels im Skript Mathematik A, Kapitel 1.

1.1 Mengen

Oft ist es sehr nützlich, mathematische Aussagen nicht nur für einzelne, konkrete Zahlen zu machen, sondern gleich für viele Zahlen zusammen; zum Beispiel für alle Zahlen, die größer als 2 sind, oder alle Lösungen einer bestimmten Gleichung. Man fasst die Zahlen dazu zu *Mengen* von Zahlen zusammen. Die wichtigste Schreibweise bei Mengen ist die *Elementbeziehung* mit dem „Elementzeichen“ \in . Die Elementbeziehung gibt an, ob eine bestimmte Zahl zur Menge gehört oder nicht. Man schreibt:

- $x \in M$: die Zahl x gehört zur Menge M , x ist *Element* von M .
- $x \notin M$: x ist nicht Element von M .

Zur Unterscheidung zwischen Zahlen und Mengen benutzt man für Mengen große Buchstaben, für Zahlen (meistens) kleine.

Eine spezielle Menge ist die *leere Menge*: Das ist die Menge, die keine Elemente enthält. Für sie schreibt man das Symbol

$$\emptyset \quad (\text{oder } \{\}).$$

Bemerkung: Elemente einer Menge können auch Punkte, Vektoren oder andere mathematische Objekte sein. Wir bleiben aber hier zuerst bei Mengen von Zahlen.

Angabe von Mengen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, um festzulegen, welche Zahlen genau zu einer Menge gehören:

- (a) Direkte Angabe der Elemente der Menge, z.B.

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (\text{endliche Menge})$$

$$M = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \quad (\text{unendliche Menge})$$

- (b) Angabe einer Bedingung oder Formel, die die Elemente der Menge erfüllen müssen:

$$M = \{x \mid \text{Bedingung an } x\}$$

$$M = \{x \in N \mid \text{Bedingung an } x\} \quad (\text{betrachte nur } x \text{ aus Grundmenge } N)$$

$$M = \{\text{Formel für } x \mid \text{Bedingungen an Variablen der Formel}\}$$

Im Folgenden sehen wir einige Beispiele für diese verschiedenen Arten, eine Menge anzugeben.

Grundlegende Mengen

Für jede der verschiedenen Arten von Zahlen wird eine entsprechende Menge definiert:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	Menge der <i>natürlichen Zahlen</i> (mit Null)
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$	natürliche Zahlen ohne Null
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$	<i>ganze Zahlen</i>
$\mathbb{Q} = \text{Menge aller Brüche}$	<i>rationale Zahlen</i>

Anstatt die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} nur mit Worten zu beschreiben („alle Brüche“), geben wir jetzt eine formal exakte Definition der Menge \mathbb{Q} an. Dabei können wir die schon definierten Mengen \mathbb{N} , \mathbb{N}^* , \mathbb{Z} benutzen. Eine rationale Zahl x ist ein beliebiger Bruch, also $x = \frac{m}{n}$. Dabei können m und n positive oder negative ganze Zahlen sein – durch negative Zahlen für m oder n erhalten wir die negativen Brüche. Damit ist erstmal $m, n \in \mathbb{Z}$. Allerdings darf der Nenner n im Bruch nicht Null sein. Außerdem langt es für negative Brüche, nur an einer Stelle im Bruch eine negative Zahl zu haben. Wenn wir die negativen Zahlen nur im Zähler m zulassen, so bleiben im Nenner genau die positiven ganzen Zahlen ab 1 übrig, d.h. $n \in \mathbb{N}^*$. Eine beliebige rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ kann man daher schreiben als

$$x = \frac{m}{n} \quad \text{wobei} \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Das ist die Bedingung an x , um ein Element von \mathbb{Q} zu sein. Somit können wir die Menge \mathbb{Q} formal als

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

schreiben. Da die Elemente von \mathbb{Q} alle durch die Formel $x = \frac{m}{n}$ gegeben sind, kann man in der Definition der Menge \mathbb{Q} den Bruch auch direkt vor den senkrechten Strich schreiben; das x ist dann nicht mehr nötig:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Die Menge der rationalen Zahlen lässt sich auch anders angeben: Jeden Bruch kann man als endlichen oder periodischen Dezimalbruch schreiben, z.B. ist $\frac{7}{4} = 1.75$ oder $\frac{23}{22} = 1.0454545\dots$. Daher kann man auch sagen

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ ist endlicher oder periodischer Dezimalbruch}\}.$$

Wenn man hier die Bedingung, dass der Dezimalbruch endlich oder periodisch sein muss, weglässt, erhält man die reellen Zahlen:

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist (beliebiger) Dezimalbruch}\} \quad \textit{reelle Zahlen}$$

Die Menge \mathbb{R} enthält also zusätzlich auch Zahlen, die unendliche, nicht-periodische Dezimalbrüche sind. Solche Zahlen heißen *irrational*. Zum Beispiel sind $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$ und $\pi = 3.14159265\dots$ irrationale Zahlen.

Beachte: Nach unserer Definition gehört die Zahl 0 zur Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} dazu. Diese Konvention wird aber nicht in allen Büchern verwendet. Man findet auch Autoren, bei denen \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null bezeichnet. In dem Fall schreibt man dann \mathbb{N}_0 für die Menge mit Null. Die Mathematik ist hier also tatsächlich nicht eindeutig.

Sobald man sich aber für eine der Möglichkeiten entschieden hat, muss man diese konsequent beibehalten (innerhalb eines Buches z.B.). In diesen Skripten ist immer $0 \in \mathbb{N}$.

Teilmengen

Eine Menge M kann *Teilmenge* einer anderen Menge N sein: M ist Teilmenge von N , wenn alle Elemente von M auch zu N gehören. Man schreibt dafür $M \subset N$. Zum Beispiel gilt

$$\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Beispiel 1.1.1 Wir geben hier einige Beispiele dafür an, wie man Mengen formal richtig aufschreiben kann.

- (a) Menge der ganz (d.h. ohne Rest) durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen:

$$A = \{0, 5, 10, 15, \dots\} = \{5n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- (b) Alle reellen Zahlen größer als π :

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \pi\}$$

- (c) Alle reellen Lösungen von $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$:

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 2x^2 - 1 = 0\}$$

Das letzte Beispiel zeigt, wie man eine Menge exakt definieren kann, auch wenn man die Zahlen in der Menge nicht konkret kennt. Das erste Beispiel zeigt dagegen, dass es oft mehr als nur eine Möglichkeit gibt, eine Menge korrekt aufzuschreiben. (Tatsächlich gibt es noch mindestens eine weitere Möglichkeit, A hinzuschreiben!)

1.2 Logische Symbole

Um Aussagen über Mengen und Gleichungen miteinander zu verknüpfen, benutzt man logische Symbole. Die für uns wichtigen stehen in der nachfolgenden Tabelle:

Symbol	Bedeutung	Name
\wedge	und	Konjunktion
\vee	oder	Disjunktion
\Rightarrow	wenn dann, daraus folgt	Implikation
\Leftrightarrow	genau dann wenn	Äquivalenz

Beispiel 1.2.1 Wenn $x = 7$ ist, dann ist $x^2 = 49$. Diese Implikation kann man als logische Aussage kurz so schreiben:

$$x = 7 \Rightarrow x^2 = 49$$

Die Implikation von Rechts nach Links \Leftarrow gilt hier nicht (also auch nicht die Äquivalenz \Leftrightarrow), denn wenn $x^2 = 49$ ist, könnte auch $x = -7$ gelten. Wenn wir den Fall $x = -7$ mit aufnehmen, können wir das als Äquivalenz so schreiben:

$$x = 7 \vee x = -7 \Leftrightarrow x^2 = 49$$

In Worten: $x^2 = 49$ gilt genau dann, wenn $x = 7$ oder $x = -7$.

Mengenoperationen

Mit Hilfe der logischen Symbole können wir einige Mengenoperationen wie Vereinigungs- oder Schnittmenge einfach definieren:

$$\begin{aligned} M \cup N &= \{x \mid x \in M \vee x \in N\} && \text{Vereinigung} \\ M \cap N &= \{x \mid x \in M \wedge x \in N\} && \text{Schnitt} \\ M \setminus N &= \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\} && \text{Differenz (Rest)} \end{aligned}$$

Beachte: Über die Vereinigungsmenge weiß man, dass $x \in M \cup N$ auch dann gilt, wenn $x \in M$ und $x \in N$. Das bedeutet, dass das mathematische Oder „ \vee “ kein Entweder-Oder ist (wie oft in der Umgangssprache gebraucht), sondern ein „inklusives“ Oder. Zum Beispiel ist in der Aussage

$$x \leq 0 \vee x \geq 0$$

auch der Fall $x = 0$ mit enthalten, in dem $x \leq 0$ und $x \geq 0$ beides gilt.

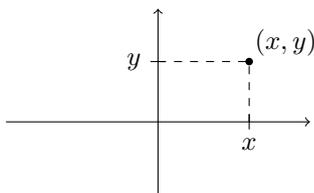
Beispiel 1.2.2 Wir können die Menge aller irrationalen Zahlen folgendermaßen als Restmenge schreiben¹:

$$I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad (\text{Menge der irrationalen Zahlen})$$

Mit dieser Definition gilt dann (zum Beispiel)

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I \quad \text{und} \quad \mathbb{Q} \cap I = \emptyset.$$

¹Das ist aber keine Standardnotation. Für die Menge der irrationalen Zahlen gibt es kein festes Symbol wie bei \mathbb{N} oder \mathbb{R} .

Abbildung 1.1: Das Paar (x, y) als Punkt im Koordinatensystem

1.3 Produkte von Mengen

Eine weitere nützliche Mengenoperation ist die Produktmenge. Sie enthält Paare von Zahlen. Sind a und b zwei Zahlen, so nennt man (a, b) das *Paar* von a und b . Das Paar ist nichts weiteres als beide Zahlen zusammen, als Einheit betrachtet. Für zwei gegebene Mengen M und N heißt die Menge aller Paare von Zahlen $a \in M, b \in N$ das *Produkt* von M und N (auch kartesisches Produkt):

$$M \times N = \{(a, b) \mid a \in M, b \in N\} \quad \text{Produktmenge}$$

Beachte: Im Paar (a, b) ist die Reihenfolge wichtig. Zum Beispiel sind die Paare $(1, 2)$ und $(2, 1)$ verschieden. Im Gegensatz dazu ist bei Mengen die Reihenfolge egal: $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

Bei der Produktmenge $M \times N$ stehen an der linken Stelle im Paar (a, b) immer die Zahlen der linken Menge M , rechts immer die Zahlen der rechten Menge N .

Beispiel 1.3.1 (a) Angenommen, die Mengen $M = \{0, 1\}$ und $N = \{1, 2, 3\}$ sind gegeben. Die Produktmenge $M \times N$ ist dann

$$M \times N = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$$

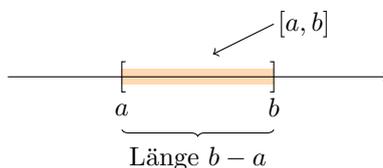
(2) Für zwei reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ beschreibt (x, y) den Punkt im kartesischen Koordinatensystem mit den Koordinaten x und y , siehe Abbildung 1.1. Die Produktmenge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist damit die Menge aller Punkte (x, y) der Ebene. Kurz: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist die (Koordinaten-) Ebene.

1.4 Intervalle

Ein *Intervall* ist eine Menge, die alle reellen Zahlen zwischen zwei Zahlen a und b enthält (wobei $a < b$), und eventuell auch die Randpunkte. Intervalle entsprechen also zusammenhängenden Stücken auf der Zahlengerade. Es gibt folgende Arten von Intervallen:

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	<i>offenes</i> Intervall
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	<i>abgeschlossenes</i> Intervall
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	nach rechts <i>halboffenes</i> Intervall
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	nach links <i>halboffenes</i> Intervall

Die Randpunkte a, b der Intervalle gehören also im „abgeschlossenen“ Fall dazu, im „offenen“ Fall dagegen nicht dazu. Ein abgeschlossenes Intervall zum Beispiel hat auf dem Zahlenstrahl die Form



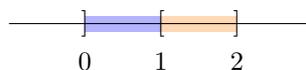
Die oben angegebenen Intervalle sind alle beschränkt, d.h. sie haben eine endliche Länge, nämlich $b - a$. Es gibt aber auch *unbeschränkte* (unendliche) Intervalle:

$$\begin{aligned}]a, \infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, &]-\infty, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \\ [a, \infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, &]-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \end{aligned}$$

Hier wurde also jeweils einer der Randpunkte durch ∞ oder $-\infty$ ersetzt. Man beachte aber, dass ∞ oder $-\infty$ nie selbst zum Intervall gehören, denn $\pm\infty$ sind keine reellen Zahlen!

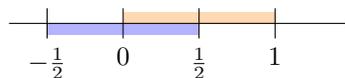
Beispiel 1.4.1 Dieses Beispiel illustriert Intervalle und Mengenoperationen.

(a) $]0, 1[\cup [1, 2] =]0, 2]$



Erläuterung: Die Vereinigung enthält alle Zahlen zwischen 0 und 1 (aus dem ersten Intervall $]0, 1[$) und alle Zahlen zwischen 1 und 2 (aus dem zweiten Intervall $[1, 2]$). Die „Kontaktzahl“ 1 gehört ebenfalls zur Vereinigung, da sie zum zweiten Intervall $[1, 2]$ gehört (denn das Intervall ist abgeschlossen!). Somit sind alle Zahlen zwischen 0 und 2 Teil der Vereinigung. Die 2 selbst gehört auch dazu (denn sie liegt in $[1, 2]$), 0 aber nicht. (0 gehört nicht zu $]0, 1[$ weil das Intervall offen ist.) Das Ergebnis ist daher das halboffene Intervall $]0, 2]$.

(b) $]0, 1[\cap]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[=]0, \frac{1}{2}[$



Aus der Grafik ist klar, dass der Schnitt den Bereich zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ enthält. Die Zahlen 0 und $\frac{1}{2}$ gehören aber nicht zum Schnitt, denn $0 \notin]0, 1[$ und $\frac{1}{2} \notin]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, da beide Intervalle offen sind. Also ist der Schnitt das offene Intervall $]0, \frac{1}{2}[$.

(c) $[-1, 3] \setminus]0, 1[= [-1, 0] \cup [1, 3]$

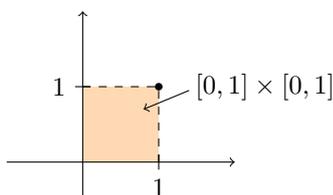
Hier wird das „Mittelstück“ von 0 bis 1 entfernt, so dass Intervalle von -1 bis 0 und von 1 bis 3 übrig bleiben. Da das entfernte Intervall $]0, 1[$ offen ist, bleiben 0 und 1 in der Mengendifferenz enthalten, und somit ergibt sich die Vereinigung der beiden abgeschlossenen Intervalle $[-1, 0]$ und $[1, 3]$.

(d) $] - 1, 0[\cup] 0, 1[=] - 1, 1[\setminus \{0\}$

Hier werden die zwei offenen Intervalle $] - 1, 0[$ und $] 0, 1[$ vereinigt, die sich am Punkt 0 berühren. Da 0 aber nicht zu den Intervallen gehört (da sie offen sind), liegt 0 nicht in der Vereinigung. Bis auf den Punkt 0 ist das Ergebnis also das Intervall von -1 bis 1 (offen, weil -1 und 1 nicht zu den Ausgangsintervallen gehören). Das kann man als Mengendifferenz schreiben, bei der aus $] - 1, 1[$ nur der Punkt 0, also die Menge $\{0\}$ entfernt wurde.

(e) $[0, 1] \times [0, 1]$

Das Produkt enthält alle Paare (x, y) , für die sowohl x als auch y aus dem Intervall $[0, 1]$ kommen. Das sind genau die Punkte des Quadrats zwischen den Punkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$. Das Produkt $[0, 1] \times [0, 1]$ ist also dieses Quadrat.



1.5 Rechnen mit Ungleichungen

In diesem Abschnitt üben wir zum einen das Rechnen mit Ungleichungen, bei dem besondere Regeln beachtet werden müssen. Zum anderen werden wir die Lösungsmengen dieser Ungleichungen mit Hilfe von Intervallen darstellen, und damit weitere Beispiele für die Intervallschreibweise bekommen.

Beim Rechnen mit Ungleichungen gelten folgende Regeln:

Satz 1.5.1 (Rechenregeln für Ungleichungen)

$$x < y \Leftrightarrow x + a < y + a \quad \text{für jedes } a \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

$$\text{Für } a > 0: \quad x < y \Leftrightarrow ax < ay \quad (1.2)$$

$$\text{Für } a < 0: \quad x < y \Leftrightarrow ax > ay \quad (1.3)$$

$$\text{Für } x, y > 0: \quad x < y \Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \quad (1.4)$$

Entsprechende Regeln gelten bei „ \leq “:

$$x \leq y \Leftrightarrow x + a \leq y + a \quad \text{für jedes } a \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

$$\text{Für } a > 0: \quad x \leq y \Leftrightarrow ax \leq ay \quad (1.6)$$

$$\text{Für } a < 0: \quad x \leq y \Leftrightarrow ax \geq ay \quad (1.7)$$

$$\text{Für } x, y > 0: \quad x \leq y \Leftrightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \quad (1.8)$$

Die Äquivalenzen (1.1) und (1.5) gelten auch mit $-a$ statt $+a$, denn liest man sie von rechts nach links, so wird die Zahl a subtrahiert. Entsprechend gelten (1.2), (1.3), (1.6), (1.7) auch für das Teilen durch a .

Achtung!

Die Äquivalenzen (1.3) und (1.7) bedeuten, dass sich bei Multiplikation einer Ungleichung mit einer negativen Zahl das Ungleichungszeichen dreht.

Beispiel 1.5.2 Wir berechnen Lösungsmengen von Ungleichungen.

- (a) Finde alle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ für die $-7x - 1 < 13$ gilt.

Formulierung als Menge: Bestimme die Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -7x - 1 < 13\}.$$

Wir lösen die Ungleichung nach x auf und benutzen dazu die Rechenregeln von Satz 1.5.1:

$$-7x - 1 < 13 \Leftrightarrow -7x < 14 \Leftrightarrow x > \frac{14}{-7} = -2$$

Im letzten Schritt dreht sich das Ungleichungszeichen, da durch die negative Zahl -7 geteilt wurde. Die Ungleichung $-7x - 1 < 13$ gilt also genau dann wenn $x > -2$, d.h. für alle $x > -2$. Somit ist

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\} =] - 2, \infty[.$$

- (b) Bestimme $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq 3x < 2x - 1\}$.

Die doppelte Ungleichung in B bedeutet, dass gleichzeitig zwei Ungleichungen gelten müssen:

$$-6 \leq 3x < 2x - 1 \Leftrightarrow \underbrace{-6 \leq 3x}_{\text{(I)}} \wedge \underbrace{3x < 2x - 1}_{\text{(II)}}$$

Wir lösen beide Ungleichungen für sich:

$$\begin{aligned} \text{(I):} & \quad -6 \leq 3x \Leftrightarrow -2 \leq x \\ \text{(II):} & \quad 3x < 2x - 1 \Leftrightarrow x < -1 \end{aligned}$$

Da beide Ungleichung zugleich erfüllt sein müssen, erhalten wir

$$\text{(I)} \wedge \text{(II)} \Leftrightarrow -2 \leq x \wedge x < -1 \Leftrightarrow -2 \leq x < -1.$$

Also ist

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < -1\} = [-2, -1[.$$

- (c) Bestimme die Menge

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{x+1} > -2, x \neq -1 \right\}.$$

Beachte, dass $\frac{x-1}{x+1}$ für $x = -1$ nicht definiert ist (Null im Nenner!); daher ist dieser Wert in C durch $x \neq -1$ ausgeschlossen.

Unser Ziel ist wieder, die Ungleichung nach x aufzulösen. Dafür muss

$$\frac{x-1}{x+1} > -2 \tag{1.9}$$

mit $x+1$ multipliziert werden. Hier ist dann die Frage, ob $x+1$ positiv oder negativ ist, denn bei Multiplikation mit einer negativen Zahl dreht sich ja das Ungleichungszeichen. Da wir aber noch nicht wissen, welche Werte x hat (das wollen wir ja gerade berechnen!), müssen wir beide mögliche Fälle untersuchen, $x+1 > 0$ und $x+1 < 0$. Für den Wert von x bedeuten diese Fälle

1. Fall: $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
2. Fall: $x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

Wir lösen nun die Ungleichung (1.9) für beide Fälle nacheinander, machen also eine *Fallunterscheidung*:

1. Fall $x > -1$.

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+1} > -2 & \stackrel{x+1>0}{\Leftrightarrow} x-1 > -2(x+1) \\ & \Leftrightarrow x-1 > -2x-2 \quad \Leftrightarrow 3x-1 > -2 \\ & \Leftrightarrow 3x > -1 \quad \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Im ersten Schritt haben wir benutzt, dass $x+1 > 0$ (denn wir sind im 1. Fall). Somit dreht sich bei der Multiplikation mit $x+1$ das Ungleichungszeichen *nicht*.

Damit die Ungleichung (1.9) gilt, müssen hier also zwei Bedingungen an x erfüllt sein: $x > -1$ (damit wir im Fall 1 sind), und $x > -\frac{1}{3}$ (für die Ungleichung). Wir müssen also die Bedingung aus der Fallunterscheidung ($x > -1$) mit unserem Ergebnis für diesen Fall ($x > -\frac{1}{3}$) mit „und“ verknüpfen; das ergibt

$$x > -1 \wedge x > -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}.$$

Diese letzte Umformung entspricht dem Schnitt (wegen „ \wedge “) von Intervallen: $] -1, \infty[\cap] -\frac{1}{3}, \infty[=] -\frac{1}{3}, \infty[$.

2. Fall $x < -1$.

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+1} > -2 & \stackrel{x+1<0}{\Leftrightarrow} x-1 < -2(x+1) = -2x-2 \\ & \Leftrightarrow 3x < -1 \quad \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Im ersten Schritt ist hier jetzt $x+1 < 0$ (wegen Fall 2), so dass wir mit dem negativen Term $x+1$ multiplizieren; deswegen dreht sich hier das Ungleichungszeichen!

Zusammen mit der Bedingung der Fallunterscheidung bekommen wir dann

$$x < -1 \wedge x < -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x < -1.$$

Für die **Gesamtlösung** müssen wir nun die Ergebnisse der beiden Fälle mit „oder“ verknüpfen (denn jeder x -Wert der Fallunterscheidung erfüllt

die Bedingung $x > -1$ oder $x < -1$. In der Sprechweise mit Mengen wollen die Lösungsmenge für den 1. Fall mit der für den 2. Fall *vereinigen* um alle Lösungen zu erhalten. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} & x < -1 \quad \vee \quad x > -\frac{1}{3} \\ \implies C &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \vee x > -\frac{1}{3}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{3}\} \\ &=]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{3}, \infty[\end{aligned}$$

$$(d) D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{x-2} \geq 3, x \neq 2 \right\}$$

Hier wollen wir mit $x - 2$ multiplizieren und müssen deshalb die Fälle $x - 2 > 0$ und $x - 2 < 0$ unterscheiden.

1. Fall $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

$$\frac{x}{x-2} \geq 3 \stackrel{x-2>0}{\iff} x \geq 3(x-2) = 3x-6 \Leftrightarrow 6 \geq 2x \Leftrightarrow 3 \geq x$$

Also

$$x > 2 \wedge x \leq 3 \Leftrightarrow 2 < x \leq 3.$$

2. Fall $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.

$$\frac{x}{x-2} \geq 3 \stackrel{x-2<0}{\iff} x \leq 3(x-2) = 3x-6 \Leftrightarrow 6 \leq 2x \Leftrightarrow 3 \leq x$$

Also zusammen mit der Bedingung der Fallunterscheidung

$$x < 2 \wedge x \geq 3.$$

Das ist ein *Widerspruch*: Keine Zahl erfüllt zugleich $x < 2$ und $x \geq 3$. Das bedeutet, dass für die Lösung nur der 1. Fall in Frage kommt. (Anders gesagt ist Lösungsmenge im zweiten Fall leer.) Damit ist also

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3\} =]2, 3].$$

1.6 Der Betrag

Der Betrag ist eine sehr nützliche Operation, die an vielen Stellen in der Mathematik verwendet wird.

Für $a \in \mathbb{R}$ ist der *Betrag* $|a|$ definiert durch

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Der Betrag ist also über eine Fallunterscheidung definiert. Für positive Zahlen (oder 0) ist $|a| = a$, der Betrag ändert also die Zahl nicht. Für negative Zahlen ist $|a| = -a$. Der Betrag fügt hier also ein zusätzliches Minuszeichen zur Zahl hinzu, so dass die entsprechende positive Zahl entsteht. Zum Beispiel ist

$$|6| = 6, \quad |-17| = -(-17) = 17.$$

Anders gesagt entfernt der Betrag also ein eventuelles Minuszeichen der eingesetzten Zahl.

Für den Betrag gelten folgende einfache Rechenregeln:

$$|-a| = |a|, \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (1.11)$$

Die erste Gleichung ist klar, da sich die Zahlen a und $-a$ nur im Vorzeichen unterscheiden. Die Gleichungen für Produkt und Quotient folgen daraus, dass die Vorzeichen von a und b nur Einfluss auf das Vorzeichen von ab und $\frac{a}{b}$ haben.

Für Summen gilt die sogenannte *Dreiecksungleichung*:

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (1.12)$$

Achtung!

In (1.12) gilt nur die Ungleichung „ \leq “; Gleichheit „ $=$ “ ist im Allgemeinen falsch! Das ergibt sich daraus, dass, wenn a und b verschiedene Vorzeichen haben, $a + b$ eigentlich eine Subtraktion ist und daher im Betrag kleiner als $|a| + |b|$. (Probieren sie das mit konkreten Zahlen aus!)

Mit dem Betrag kann man eine allgemeine Formel für den *Abstand zweier Zahlen* angeben:

$$|a - b| = \text{Abstand von } a \text{ und } b \text{ auf der Zahlengerade} \quad (1.13)$$

Wir veranschaulichen diese Formel grafisch:

$$a < b: \quad \begin{array}{c} \text{-----} | \text{-----} | \text{-----} \longrightarrow \\ \quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad} \\ \quad \quad \quad b - a = |a - b| \end{array}$$

$$(\text{denn } a - b < 0 \Rightarrow |a - b| = -(a - b) = b - a)$$

$$b < a: \quad \begin{array}{c} \text{-----} | \text{-----} | \text{-----} \longrightarrow \\ \quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad} \\ \quad \quad \quad a - b = |a - b| \quad (a - b > 0) \end{array}$$

Beim Rechnen mit Beträgen in Gleichungen oder Ungleichung treten häufig Fallunterscheidungen auf. Wir studieren das in den nächsten Beispielen.

Beispiel 1.6.1 (a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x - 2| < 1$?

Oder äquivalent: Bestimme die Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 1\}.$$

Da der Betrag in (1.10) über eine Fallunterscheidung definiert ist, benutzen wir eine entsprechende Fallunterscheidung, um den Betrag $|x - 2|$ aufzulösen:

1. Fall $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

In diesem Fall ist $|x - 2| = x - 2$, also

$$|x - 2| < 1 \Leftrightarrow x - 2 < 1 \Leftrightarrow x < 3.$$

Mit der Bedingung der Fallunterscheidung erhalten wir damit

$$x \geq 2 \wedge x < 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq x < 3.$$

2. Fall $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Jetzt ist $|x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$, also

$$|x - 2| < 1 \Leftrightarrow -x + 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x.$$

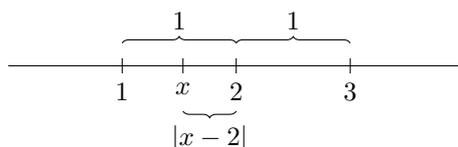
Das ergibt

$$x < 2 \wedge 1 < x \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x < 2.$$

Insgesamt (1. Fall oder 2. Fall) ergibt sich also

$$\begin{aligned} 2 \leq x < 3 \vee 1 < x < 2 &\Leftrightarrow 1 < x < 3 \\ \Rightarrow A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\} &=]1, 3[\end{aligned}$$

Anschaulich kann man das Ergebnis auch so erhalten:



Da $|x - 2|$ der Abstand von x zu 2 ist, bedeutet $|x - 2| < 1$, dass der Abstand von x zu 2 echt kleiner als 1 sein muss. Man kann also von 2 ausgehend nach links und rechts jeweils den Abstand 1 abtragen. Das ergibt das Intervall von 1 bis 3, wobei die Randpunkte nicht dazu gehören, weil der Abstand ja echt kleiner als 1 sein soll. Somit ergibt sich wieder $]1, 3[$.

Bemerkung: Kann man den Ausdruck $|x + 3|$ auch als Abstand von x zu einer bestimmten Zahl verstehen? Es gilt

$$|x + 3| = |x - (-3)|,$$

also ist es der Abstand von x zu -3 .

(b) Was sind die Lösungen der Gleichung $|x + 1| = 3|x|$?

Da hier zwei (verschiedene) Beträge vorkommen, ergeben sich auch zunächst zwei verschiedene Fallunterscheidungen:

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{wenn } x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \\ -(x + 1) & \text{wenn } x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \end{cases} \quad (1.14)$$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Das ergibt 4 Kombinationsmöglichkeiten:

1. $x \geq -1 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$
2. $x \geq -1 \wedge x < 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0$
3. $x < -1 \wedge x \geq 0 \Rightarrow$ Widerspruch, Fall kommt nicht vor
4. $x < -1 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x < -1$

Die verbliebenen drei Fälle entsprechen den drei Bereichen auf dem Zahlenstrahl, die sich aus den „Grenzzahlen“ -1 und 0 in den Fallunterscheidungen der Beträge (1.14) und (1.15) ergeben:

$$\begin{array}{c} \overline{\hspace{10em}} \longrightarrow \\ \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \\ \quad \quad \quad -1 \quad \quad \quad 0 \\ \underbrace{\hspace{3em}} \quad \underbrace{\hspace{3em}} \quad \underbrace{\hspace{3em}} \\ x < -1 \quad -1 \leq x < 0 \quad x \geq 0 \end{array}$$

Wir können jetzt die Gleichung $|x+1| = 3|x|$ für jeden der drei Fälle lösen:

1. Fall $x < -1$:

In diesem Fall ist $|x+1| = -(x+1)$ und $|x| = -x$ (denn $x < 0$). Also

$$\begin{aligned} |x+1| = 3|x| &\Leftrightarrow -(x+1) = 3 \cdot (-x) \Leftrightarrow -x-1 = -3x \\ &\Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Das ergibt $x < -1 \wedge x = \frac{1}{2}$, ein Widerspruch. Also keine Lösung in diesem Fall.

2. Fall $-1 \leq x < 0$:

$$\Rightarrow |x+1| = x+1, \quad |x| = -x$$

Damit

$$|x+1| = 3|x| \Leftrightarrow x+1 = 3 \cdot (-x) \Leftrightarrow 4x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$x = -\frac{1}{4}$ erfüllt die Bedingung dieses Falls $-1 \leq x < 0$. Damit ist $x = -\frac{1}{4}$ eine Lösung.

3. Fall $x \geq 0$:

$$\Rightarrow |x+1| = x+1, \quad |x| = x$$

also

$$|x+1| = 3|x| \Leftrightarrow x+1 = 3x \Leftrightarrow 1 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$x = \frac{1}{2}$ erfüllt $x \geq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ Lösung

Insgesamt: $|x+1| = 3|x|$ hat die Lösungen $x = -\frac{1}{4}$ und $x = \frac{1}{2}$.

Anders gesagt:

$$|x+1| = 3|x| \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \vee x = \frac{1}{2}$$

1.7 Fakultät und Binomialkoeffizient

Zum Abschluss dieses Kapitels behandeln wir noch den allgemeinen binomischen Satz. Dazu schauen wir uns zuerst Fakultäten und Binomialkoeffizienten an.

Sei n eine natürliche Zahl größer oder gleich 1 ($n \geq 1$). Also $n \in \mathbb{N}^*$. Die *Fakultät* von n , geschrieben als $n!$ (sprich „ n Fakultät“), ist das Produkt der ersten natürlichen Zahlen von 1 bis n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad (1.16)$$

Die ersten Fakultäten sind also

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ 2! &= 1 \cdot 2 = 2 \\ 3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \\ 4! &= \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3}_{3!} \cdot 4 = 3! \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24 \\ 5! &= 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5 = 4! \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120 \end{aligned}$$

und so weiter. Außerdem definiert man noch die Fakultät von Null²:

$$0! = 1 \quad (1.17)$$

Mit den Fakultäten kann man jetzt die sogenannten *Binomialkoeffizienten* definieren: Für zwei natürliche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ (sprich „ n über k “) gegeben durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (1.18)$$

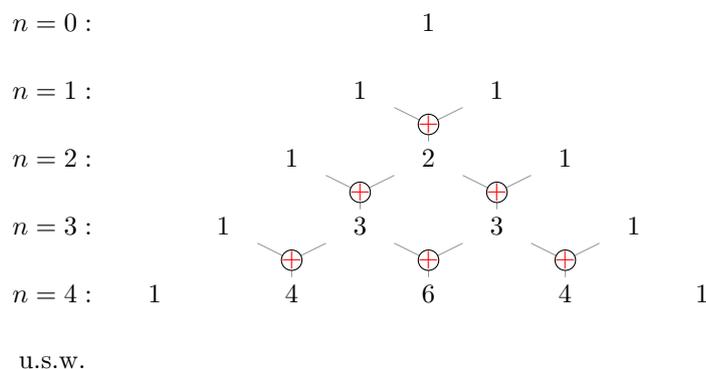
Als Beispiel berechnen wir zwei Binomialkoeffizienten:

$$\begin{aligned} \binom{5}{3} &= \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \\ \binom{2}{0} &= \frac{2!}{0!(2-0)!} = \frac{2!}{0!2!} \stackrel{0! \equiv 1}{=} \frac{2!}{2!} = 1 \end{aligned}$$

In beiden Fällen kann man den Nenner komplett wegekürzen. Das ist tatsächlich immer so: Obwohl der Binomialkoeffizient als Bruch definiert ist, ist sein Wert immer eine natürliche Zahl.

Die Binomialkoeffizienten lassen sich sehr schön grafisch im *Pascalschen Dreieck* darstellen:

²Diese Formel kann man nicht aus (1.16) folgern, es ist eine unabhängige Definition. (1.16) gilt nur für Zahlen $n \geq 1$.



Man erkennt leicht das Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks: Jede neue Zeile hat eine Zahl mehr als die vorangehende Zeile. Links und rechts am Rand steht immer eine 1, und jede Zahl im Inneren erhält man als Summe der beiden darüberstehenden Zahlen.

Der Zusammenhang zwischen Pascalschem Dreieck und Binomialkoeffizienten ist nun so: Jede Zeile im Dreieck enthält genau die Koeffizienten $\binom{n}{k}$ für ein festes n , wobei die oberste Zeile (die Spitze des Dreiecks) zu $n = 0$ gehört. Zum Beispiel enthält die Zeile für $n = 2$ genau die Werte der Binomialkoeffizienten $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{2}{2}$ in dieser Reihenfolge, also

$$\binom{2}{0} = 1, \quad \binom{2}{1} = 2, \quad \binom{2}{2} = 1.$$

Entsprechend ist für $n = 4$

$$\binom{4}{0} = 1, \quad \binom{4}{1} = 4, \quad \binom{4}{2} = 6, \quad \binom{4}{3} = 4, \quad \binom{4}{4} = 1.$$

Übung: Überzeugen sie sich durch Nachrechnen, dass die Definitionsformel (1.18) und das Pascalsche Dreieck dieselben Werte für den Binomialkoeffizient liefern. Berechnen sie z.B. $\binom{4}{0}, \dots, \binom{4}{4}$ mittels (1.18) und vergleichen sie mit dem Pascalschen Dreieck!

1.8 Allgemeiner binomischer Satz

Die erste binomische Formel ist

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Der allgemeine binomische Satz ist eine Verallgemeinerung dieser Formel auf höhere Potenzen, also $(a + b)^3$, $(a + b)^4$, ...

Satz 1.8.1 (allgemeiner binomischer Satz) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$

gilt

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k\end{aligned}$$

Rechnen wir nach, was der Satz für die ersten Werte von n ergibt. Die Binomialkoeffizienten lesen wir dabei aus dem Pascalschen Dreieck ab. Für $n = 2$ erhalten wir

$$(a+b)^2 = \underbrace{\binom{2}{0}}_1 a^2 + \underbrace{\binom{2}{1}}_2 ab + \underbrace{\binom{2}{2}}_1 b^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Das ist genau die erste binomische Formel. Für $n = 3$ und $n = 4$ erhalten wir entsprechend

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3 \\ &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

und

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Den allgemeinen binomischen Satz kann man auch auf $(a-b)^n$ anwenden (als Verallgemeinerung der zweiten binomischen Formel). Dazu ersetzt man in der Formel für $(a+b)^n$ einfach b durch $-b$. (Aber aufpassen mit dem Minuszeichen bei den Potenzen: $-b$ muss zunächst in Klammern gesetzt werden!) Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a+(-b))^3 = 1a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + 1(-b)^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

Beachte: Mit dem allgemeinen binomischen Satz kann man $(a+b)^n$ sehr schnell und einfach berechnen.

Dagegen ist die Berechnung z.B. von $(a+b)^4$, indem man es zunächst als $(a+b)^2(a+b)^2$ schreibt und dann die erste binomische Formel anwendet und ausmultipliziert, viel aufwändiger und länger – und man kann mehr Rechenfehler machen!

Bemerkung: Im Kurs Mathematik B werden wir beweisen, dass der allgemeine binomische Satz richtig ist. Wir werden dort auch sehen, warum das Pascalsche Dreieck genau die Werte der Binomialkoeffizienten aus (1.18) liefert.

Kapitel 2

Reelle Funktionen

In diesem Kapitel studieren wir allgemeine Eigenschaften von reellen Funktionen. Das sind Funktionen $y = f(x)$ die von einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ abhängen und eine reelle Zahl $y \in \mathbb{R}$ als Funktionswert liefern.

Hinweis: In den alten Mathematik A&B Skripten finden sie den Stoff dieses Kapitels im Skript Mathematik A, Kapitel 2.

2.1 Die Funktionsdefinition

Die vollständige Definition einer reellen Funktion f besteht aus zwei Dingen:

- (a) ihrem *Definitionsbereich* $D \subset \mathbb{R}$;
- (b) einer *Zuordnungsvorschrift*, die jeder Zahl im Definitionsbereich $x \in D$ genau einen Funktionswert $y = f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet.

Die Zuordnungsvorschrift ist in der Regel durch einen Funktionsterm $f(x)$ gegeben.

Die Definition einer Funktion mit Definitionsbereich und Zuordnungsvorschrift schreibt man als

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$$

oder

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$$

Die Menge aller Funktionswerte

$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$$

einer Funktion heißt *Wertebereich* (oder Bildmenge) von f . Die Schreibweise $f(D)$ deutet an, dass man bei der Berechnung der Funktionswerte den gesamten Definitionsbereich, also alle $x \in D$, in die Funktion einsetzt.

Der *Graph* einer Funktion f ist die Menge aller Punkte (x, y) mit $x \in D$ und $y = f(x)$:

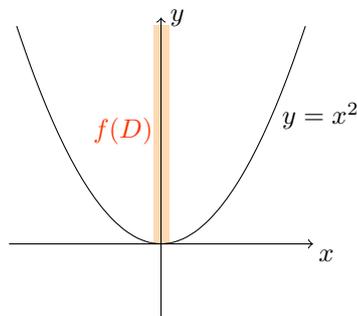
$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

Beispiel 2.1.1 Für einige einfache Funktionen geben wir die Funktionsdefinition an, Definitions- und Wertebereich sowie den Graphen.

- (a) Parabel
- $f(x) = x^2$

Funktionsdefinition:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$ Wertebereich: $f(D) = f(\mathbb{R}) = [0, \infty[$ 

Erläuterung: Da $f(x) = x^2$ für alle reellen Zahlen x definiert ist, können wir als Definitionsbereich von f $D = \mathbb{R}$ wählen. Man beachte, dass der Definitionsbereich schon in der Funktionsdefinition $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ steht (die Menge vor dem Funktionspfeil „ \rightarrow “ ist immer der Definitionsbereich).

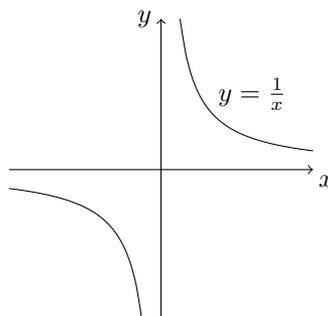
Den Wertebereich kann man direkt aus dem Graphen ablesen: die Funktionswerte von f sind ja genau die y -Koordinaten aller Punkte des Graphs. Fährt man die Parabel ab, erhält man so alle $y \geq 0$ als Funktionswerte, also das Intervall $[0, \infty[$.

- (b) Hyperbel
- $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



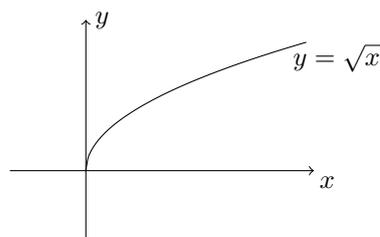
Da man nicht durch Null teilen kann, schließen wir 0 aus dem Definitionsbereich aus und wählen $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Wertebereich ist ebenfalls $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Denn läuft man den rechten (oberen) Zweig der Hyperbel ab, bekommt man alle Funktionswert $y > 0$, der linke Zweig liefert alle $y < 0$. $y = 0$ kommt nicht vor, denn $1/x$ kann nie Null werden. Im Graphen sieht man aber, wie die y -Werte beliebig nah an Null heran kommen: Wenn z.B. x immer größer wird und in Richtung ∞ läuft, wird $y = \frac{1}{x}$ immer kleiner (bleibt aber > 0). Die Funktionswerte sind also alle $y \neq 0$, d.h. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- (c) Wurzelfunktion
- $f(x) = \sqrt{x}$

$$f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$$

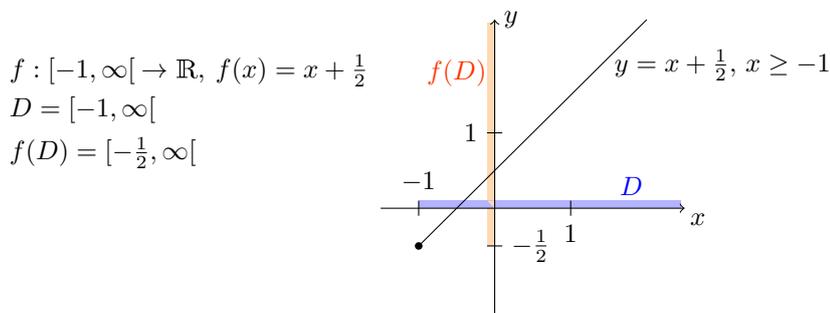
$$D = [0, \infty[$$

$$f(D) = [0, \infty[$$



Die Quadratwurzel \sqrt{x} ist nur für Zahlen $x \geq 0$ definiert, somit ist $D = [0, \infty[$. Am Graphen sieht man, dass alle $y \geq 0$ als Funktionswerte vorkommen. Daher $f(D) = [0, \infty[$.

- (d) Gerade $y = x + \frac{1}{2}$ mit eingeschränktem Definitionsbereich $x \geq -1$



Hier wurde der Definitionsbereich künstlich kleiner gewählt als eigentlich nötig. (Der Funktionsterm $x + \frac{1}{2}$ ist natürlich für alle x definiert.) Der eingeschränkte Definitionsbereich $D = [-1, \infty[$ bewirkt, dass die Funktion nur in $x \geq -1$ ausgewertet werden darf, f ist für $x < -1$ also *durch unsere Wahl von D* nicht definiert. Entsprechend beginnt der Graph erst bei $x = -1$. Dort ist $y = f(-1) = -\frac{1}{2}$, und somit kommen alle $y \geq -\frac{1}{2}$ als Funktionswerte vor, d.h. $f(D) = [-\frac{1}{2}, \infty[$.

Bemerkung: Die Wahl von $D = [-1, \infty[$ im letzten Beispiel war beliebig. Prinzipiell kann man als Definitionsbereich einer Funktion jede Teilmenge von \mathbb{R} wählen, solange für alle $x \in D$ der Funktionswert $f(x)$ berechnet werden kann. In der Regel betrachtet man den größtmöglichen, *maximalen* Definitionsbereich (also alle x , für die der Funktionsterm berechnet werden kann). Es gibt aber Situationen, in denen man nur an einem Teil der Funktion auf einem kleineren Definitionsbereich interessiert ist. Dann kann man D entsprechend einschränken. Ein Beispiel für so eine Situation sehen wir im Abschnitt über Umkehrfunktionen.

2.2 Verkettung von Funktionen

Bei der Verkettung wird eine Funktion in eine andere Funktion eingesetzt. Seien

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$$

zwei gegebene Funktionen. Der Definitionsbereich von f ist D_f , der von g ist D_g . Setzen wir $f(x)$ in $g(x)$ ein, so erhalten wir die *Verkettung* $g \circ f$ (sprich „ g verkettet mit f “, oder „ g Kringel f “). Die Verkettung ist eine neue Funktion, die formal so definiert ist:

$$g \circ f : D_{g \circ f} \rightarrow \mathbb{R}, y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

Ausführlicher kann man die Verkettung so beschreiben: Man setzt $u = f(x)$ in $y = g(u)$ ein und erhält damit $y = g(f(x))$. Die unabhängige Variable von g

ist also jetzt u (statt x). Und für die Variable u wird nun in $g(u)$ der Funktionswert von f eingesetzt, also $u = f(x)$. Damit ergibt sich auch automatisch der Definitionsbereich $D_{g \circ f}$ der Verkettung: Zuerst muss $x \in D_f$ gelten, damit $f(x)$ erklärt ist. Und dann muss $u = f(x) \in D_g$ sein, damit das in $g(u)$ eingesetzt werden kann. Das ergibt

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}.$$

Beispiel 2.2.1 Wir betrachten die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= \frac{1}{x} \\ g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x) &= x^2 + 3x \end{aligned}$$

(a) Wir berechnen die Verkettung $g \circ f$. Der Funktionsterm ist

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}$$

Dieselbe Rechnung hier noch einmal ausführlicher mit der Hilfsvariablen u :

$$\begin{aligned} y = g(u) &= u^2 + 3u, & u &= f(x) = \frac{1}{x} \\ \Rightarrow g(f(x)) &= g(u) = u^2 + 3u = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} \end{aligned}$$

Und jetzt der Definitionsbereich der Verkettung. Zunächst muss $x \in D_f$ gelten, d.h.

$$x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow x \neq 0.$$

Die weitere Bedingung wäre $f(x) \in D_g$. Hier ist aber $D_g = \mathbb{R}$, und damit ist $f(x) \in D_g = \mathbb{R}$ immer erfüllt. Das gibt also keine weitere Bedingung an x , und damit ist

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Den Definitionsbereich kann man auch direkt vom Funktionsterm der Verkettung ablesen: Damit

$$g \circ f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}$$

definiert ist, muss $x \neq 0$ sein. (Nicht durch 0 teilen!) Also $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Bemerkung: Der Definitionsbereich $D_{g \circ f}$ ist hier also der maximale Definitionsbereich für den Funktionsterm der Verkettung $g(f(x))$. Das liegt daran, dass auch die Ausgangsfunktionen f und g jeweils den maximalen Definitionsbereich haben.

(b) Man kann die beiden Funktionen f und g auch in der anderen Reihenfolge verketten, $f \circ g$. Der Funktionsterm ist dann

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{1}{x^2 + 3x}.$$

Für den Definitionsbereich muss hier

$$x \in D_g = \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g(x) \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

gelten. Also folgt ($x \in D_g = \mathbb{R}$ gilt immer)

$$g(x) = x^2 + 3x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3x \neq 0.$$

Das ist wieder genau die Bedingung, damit der Funktionsterm

$$f \circ g(x) = \frac{1}{x^2 + 3x}$$

definiert ist. Wir rechnen aus, wann $x^2 + 3x = 0$ gilt:

$$x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$$

Also müssen wir $x = 0$ und $x = -3$ aus dem Definitionsbereich ausschließen, d.h.

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}.$$

Anders gesagt ist

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \wedge x \neq -3\} = \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}. \end{aligned}$$

2.3 Die Umkehrfunktion

Bei der Berechnung des Funktionswerts ermittelt man zu einem x das zugehörige $y = f(x)$. Die Umkehrfunktion kehrt diese Rechnung um, d.h. zu einem gegebenen Funktionswert y wird das zugehörige x ermittelt, so dass wieder $y = f(x)$ gilt. Das ist aber nur in bestimmten Fällen möglich. Anders gesagt: nicht jede Funktion hat auch eine Umkehrfunktion.

Definition 2.3.1 Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *umkehrbar* (oder *invertierbar*), wenn es zu jedem $y \in f(D)$ genau ein $x \in D$ mit $y = f(x)$ gibt. Die *Umkehrfunktion* f^{-1} ordnet dann $y \in f(D)$ dieses $x \in D$ zu, d.h.

$$f^{-1} : f(D) \rightarrow \mathbb{R}, \quad y = f(x) \mapsto x.$$

Da die Umkehrfunktion f^{-1} jedem $y = f(x)$ wieder das entsprechende x zuordnet, gilt

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = x. \quad (2.1)$$

Außerdem gilt

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad (2.2)$$

denn

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = f(x) = y.$$

Der Definitionsbereich von f^{-1} ist

$$D_{f^{-1}} = f(D), \quad (2.3)$$

also gleich dem Wertebereich von f .

Gleichung (2.1) sagt aus, dass man mit der Umkehrfunktion die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflösen. Aus (2.2) folgt, dass sich Funktion und Umkehrfunktion gegenseitig aufheben. Der Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion ist in Abbildung 2.1 veranschaulicht.

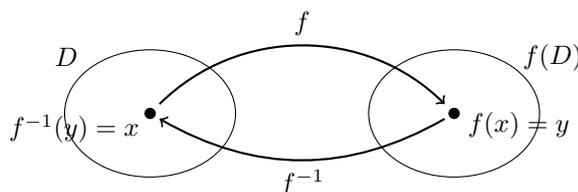


Abbildung 2.1: Die Beziehung zwischen Funktion und Umkehrfunktion

Die Berechnung der Umkehrfunktion

Die Berechnung von f^{-1} erfolgt in zwei Schritten:

1. Gleichung $y = f(x)$ nach x auflösen.

Wenn es eine eindeutige Lösung x gibt, dann ist f invertierbar und es gilt $f^{-1}(y) = x$

2. Vertauschen von x und y .

Damit erhält man die Umkehrfunktion in der Form $f^{-1}(x) = y$, so dass x wieder die unabhängige Variable ist.

Bemerkung:

- (a) Ist die Lösung x in Schritt 1 nicht eindeutig, d.h. gibt es mehr als nur ein x zum gegebenen y , so ist f nach der Definition 2.3.1 nicht umkehrbar. Die Umkehrfunktion kann dann nicht eindeutig definiert werden, da nicht klar ist, welches der verschiedenen x einem gegebenen y zugeordnet werden soll. In solch einem Fall hat f keine Umkehrfunktion.
- (b) Der Graph der Umkehrfunktion entsteht aus dem Graphen von f durch Spiegeln an der Geraden $y = x$ (das ist die Winkelhalbierende durch den 1. und 3. Quadranten). Die Spiegelung entspricht genau dem Tausch von x und y in Schritt 2.

Beispiel 2.3.2 Wir berechnen die Umkehrfunktion von

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Als ersten Schritt lösen wir $y = f(x)$ nach x auf:

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2y = x + 1 \Leftrightarrow x = 2y - 1$$

Wir erhalten eine eindeutige Lösung für x . Somit ist f invertierbar und es gilt

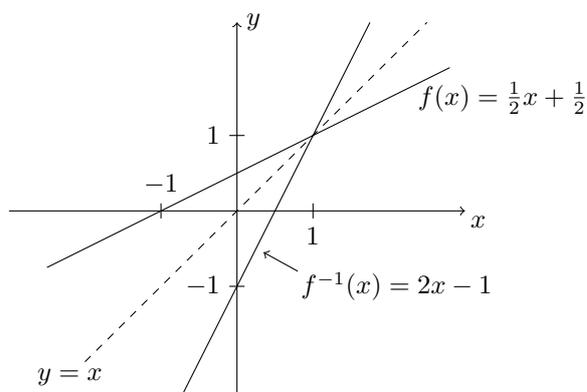
$$f^{-1}(y) = x = 2y - 1.$$

Im zweiten Schritt tauschen wir jetzt x und y , um wieder eine Funktion zu erhalten, die von x abhängt:

$$f^{-1}(x) = 2x - 1.$$

Damit haben wir die Umkehrfunktion f^{-1} von f berechnet.

Zur Illustration skizzieren wir die Graphen von f und f^{-1} :



Man sieht sehr schön, wie der Graph von f^{-1} zum Graphen von f gespiegelt ist.

Zum Schluss bestimmen wir noch den Definitionsbereich von f^{-1} : Aus der Skizze erkennt man, dass der Wertebereich von f ganz \mathbb{R} ist, dass also $f(D) = \mathbb{R}$ gilt. Aus (2.3) folgt dann

$$D_{f^{-1}} = f(D) = \mathbb{R}.$$

2.4 Injektiv, surjektiv und bijektiv

Wir lernen hier die drei Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv von Funktionen kennen. Sie treten im Zusammenhang mit Umkehrfunktionen auf. Außerdem sehen wir ein Beispiel für eine Funktion, die nicht umkehrbar ist. Durch verschiedene Einschränkungen des Definitionsbereiches machen wir sie dann aber umkehrbar.

Als erstes verallgemeinern wir die Funktionsschreibweise ein klein wenig: Eine Funktion

$$f : D \rightarrow Y$$

mit $D \subset \mathbb{R}$ und $Y \subset \mathbb{R}$ bedeutet, dass die Funktionswerte $f(x)$ in der Menge Y liegen müssen, d.h. es gilt immer $f(x) \in Y$. Der Unterschied zur Definition in Abschnitt 2.1 ist lediglich, dass die Menge, aus der die Funktionswerte kommen, nun Y statt \mathbb{R} ist.

Definition 2.4.1 Eine Funktion $f : D \rightarrow Y$ heißt

- (a) *injektiv*, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ die Implikation

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

gilt;

- (b) *surjektiv*, wenn $f(D) = Y$;

- (c) *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Bemerkung:

- (a) Die Injektivität von f bedeutet, dass verschiedene x -Werte immer verschiedene Funktionswerte $f(x)$ haben; dass also nicht zwei verschiedene x -Werte denselben Funktionswert haben können. Anders gesagt muss es also zu jedem Funktionswert einen eindeutigen x -Wert geben. Das heißt genau, dass f nach Definition 2.3.1 umkehrbar ist. Es gilt also

$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ umkehrbar.}$$

- (b) Da für die Funktion $f : D \rightarrow Y$ immer $f(x) \in Y$ gilt, ist der Wertebereich $f(D)$ automatisch eine Teilmenge von Y , d.h. $f(D) \subset Y$ gilt immer. Surjektivität bedeutet, dass die komplette Menge Y der Wertebereich ist; dass also jedes $y \in Y$ auch als Funktionswert $y = f(x)$ vorkommt.

- (c) Es gilt

$$f \text{ umkehrbar} \implies f : D \rightarrow f(D) \text{ bijektiv.}$$

Denn umkehrbar ist dasselbe wie injektiv. Und durch die Schreibweise $f : D \rightarrow f(D)$ haben wir ja schon $Y = f(D)$ gesetzt, d.h. $f : D \rightarrow f(D)$ ist auch automatisch surjektiv und somit bijektiv.

Ist $f : D \rightarrow f(D)$ bijektiv, so gilt für die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : f(D) \rightarrow D.$$

Denn der Definitionsbereich von f^{-1} ist ja nach (2.3) $D_{f^{-1}} = f(D)$. Und der Wertebereich von f^{-1} sind alle $x = f^{-1}(y)$ mit $y \in f(D)$, das sind genau alle $x \in D$, d.h. D ist der Wertebereich von f^{-1} . Wir haben damit letztlich

$$f : D \rightarrow f(D) \iff f^{-1} : f(D) \rightarrow D,$$

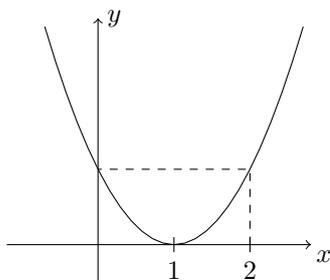
was genau der Darstellung in Abbildung 2.1 entspricht: f bildet D auf $f(D)$ ab, und f^{-1} bildet umgekehrt $f(D)$ wieder zurück auf D ab.

Beispiel 2.4.2 Wir untersuchen die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)^2$$

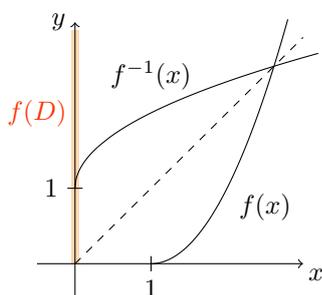
auf Umkehrbarkeit. f ist eine verschobene Parabel, also offensichtlich nicht injektiv, denn es werden immer zwei x -Werte auf denselben y -Wert abgebildet, z.B. ist

$$f(0) = 1 = f(2).$$



(Ausnahme: nur $x = 1$ wird auf $y = 0$ abgebildet.)

Es folgt, dass f nicht umkehrbar ist.

Abbildung 2.2: Umkehrfunktion von $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)^2$

Diese Ergebnis können wir auch folgendermaßen durch Rechnung erhalten: Wir folgen dem Schema zur Berechnung der Umkehrfunktion und versuchen, die Gleichung $f(x) = y$ nach x aufzulösen.

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 = y &\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{y} \quad \vee \quad x - 1 = -\sqrt{y} \\ &\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{y} \quad \vee \quad x = 1 - \sqrt{y} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Durch das Auflösen des Quadrats erhalten wir die zwei Fälle $+\sqrt{y}$ und $-\sqrt{y}$. Für $y > 0$ ergibt das also zwei verschiedene Lösungen für x . Also hat $y = (x-1)^2$ keine eindeutige Lösung x und das heißt, f ist nicht umkehrbar.

Wir können nun durch Einschränken des Definitionsbereiches die Funktion injektiv und damit umkehrbar machen. Aus der Skizze sieht man, dass entsprechende x -Werte im linken und rechten Ast der Parabel die gleichen y -Werte ergeben. Also müssen wir den Definitionsbereich so einschränken, dass nur ein Ast der Parabel übrig bleibt.

Sei zum Beispiel $D = [1, \infty[$ (d.h. wir wählen den rechten Ast der Parabel). Wir betrachten damit also jetzt die Funktion

$$f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)^2.$$

Ist diese (eingeschränkte) Funktion umkehrbar? Wir lösen dazu wieder $f(x) = y$ nach x auf. Der Beginn der Rechnung ist identisch mit (2.4). Aufgrund unserer Wahl des Definitionsbereich betrachten wir aber jetzt nur $x \in D = [1, \infty[$, d.h. $x \geq 1$. Aus (2.4) folgt damit als Lösung $x = 1 + \sqrt{y}$, denn $1 - \sqrt{y} < 1$ (wenn $y \neq 0$). Wir haben damit jetzt eine eindeutige Lösung x , und somit ist f umkehrbar und $f^{-1}(y) = x = 1 + \sqrt{y}$. Durch Vertauschen von x und y erhalten wir daraus

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x}.$$

Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion ist

$$D_{f^{-1}} = f(D) = [0, \infty[$$

wobei wir den Wertebereich $f(D)$ aus dem Graphen von f in Abbildung 2.2 abgelesen haben. Insgesamt ist die Umkehrfunktion damit schließlich

$$f^{-1} : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x}.$$

Außerdem ist

$$f : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[\quad \text{bijektiv}$$

Wir können natürlich auch eine andere Einschränkung für den Definitionsbereich von f betrachten. Statt dem rechten wählen wir jetzt den linken Ast der Parabel, d.h. wir wählen $D =] - \infty, 1]$. Die eingeschränkte Funktion ist somit

$$f :] - \infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (x - 1)^2.$$

Wegen $x \in D =] - \infty, 1] \Rightarrow x \leq 1$ erhalten wir durch auflösen von $f(x) = y$ jetzt

$$\begin{aligned} y &= (x - 1)^2 \Leftrightarrow x - 1 = -\sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y}, \\ \Rightarrow f^{-1}(y) &= 1 - \sqrt{y} \end{aligned}$$

also

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$$

nach Vertauschen von x und y . Für den Definitionsbereich ergibt sich unverändert $D_{f^{-1}} = f(D) = [0, \infty[$.

2.5 Symmetrie

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir noch die Eigenschaften der Symmetrie und der Monotonie von Funktionen.

Definition 2.5.1 Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- (a) *gerade*, wenn $f(-x) = f(x)$ gilt für alle $x \in D$;
- (b) *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$.

Die beiden Begriffe „gerade“ und „ungerade“ entsprechen tatsächlich einer Symmetrie des Graphen der Funktion f . Es gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ gerade} &\iff \text{Graph } G_f \text{ symmetrisch zur } y\text{-Achse} \\ f \text{ ungerade} &\iff \text{Graph } G_f \text{ punktsymmetrisch zum Ursprung} \end{aligned}$$

Wir verdeutlichen mit den nächsten Beispielen.

Beispiel 2.5.2 (a) Die Funktion $f(x) = x^4$ ist gerade, denn es gilt

$$f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x).$$

Im Graphen von f (Abbildung 2.3 links) ist dargestellt, wie x und $-x$ den gleichen Funktionswert $f(x) = f(-x)$ haben. Die entsprechenden Punkte im Graphen sind $(x, f(x))$ und $(-x, f(x))$ (beachte hier $f(-x) = f(x)$!); sie gehen durch Spiegelung an der y -Achse in einander über.

(b) Die Funktion $f(x) = x^3$ ist ungerade, denn

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Die entsprechenden Punkte im Graphen sind hier $(x, f(x))$ und $(-x, -f(x))$ (denn $f(-x) = -f(x)$); sie gehen durch Punktspiegelung am Ursprung des Koordinatensystems in einander über, siehe Abbildung 2.3 rechts.

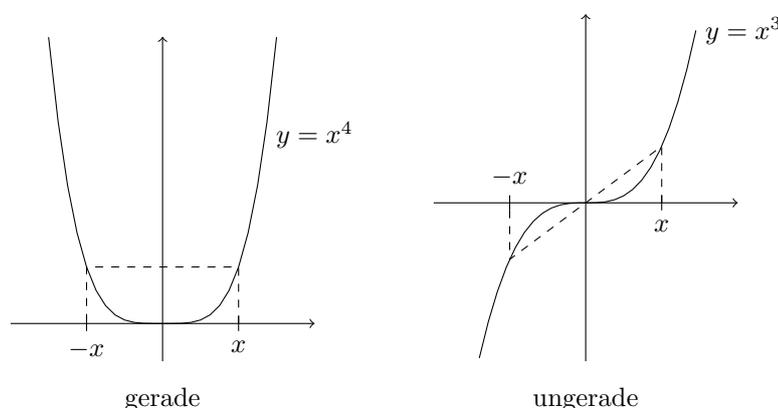


Abbildung 2.3: Beispiele für gerade und ungerade Funktionen

- (c) Welche Symmetrie-Eigenschaft hat die Funktion $f(x) = x^2 - x$? Wir berechnen dazu $f(-x)$ und vergleichen das mit $f(x)$ und $-f(x)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 - (-x) = x^2 + x \\ \Rightarrow f(-x) &\neq f(x) \quad \text{und} \quad f(-x) \neq -f(x) \end{aligned}$$

f ist also weder gerade noch ungerade.

Bemerkung:

- (a) Anhand der ersten beiden Beispiele wird klar: Die Funktion $f(x) = x^n$ ist gerade für gerade Werte von n ($n = 0, 2, 4, 6, \dots$). Und f ist ungerade für ungerade Werte von n ($n = 1, 3, 5, \dots$). Dies erklärt die Bezeichnungen „gerade“ und „ungerade“ bei Symmetrien.
- (b) Funktionen können auch symmetrisch zu anderen Geraden oder Punkten außer der y -Achse und dem Ursprung $(0, 0)$ sein. Zum Beispiel ist die nach rechts verschobene Parabel $y = (x - 2)^2$ symmetrisch zur Gerade $x = 2$ (das ist die Gerade parallel zur y -Achse durch $x = 2$). Solche Symmetrien sind im Allgemeinen aber schwieriger am Funktionsterm zu erkennen, weshalb wir hier nicht weiter darauf eingehen.

2.6 Monotonie

Monotonie bezeichnet die Eigenschaft einer Funktion, wachsende oder fallende Funktionswerte zu haben.

Definition 2.6.1 Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt auf dem Definitionsbereich D

$$\begin{aligned} \textit{monoton wachsend}, \text{ wenn} & \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \\ \textit{streng monoton wachsend}, \text{ wenn} & \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \\ \textit{monoton fallend}, \text{ wenn} & \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \\ \textit{streng monoton fallend}, \text{ wenn} & \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \end{aligned}$$

(Die Implikation muss jeweils für alle $x_1, x_2 \in D$ gelten.)

Die Funktion heißt *monoton*, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist. Entsprechend bei streng monoton.

Bei strenger Monotonie müssen die Funktionswerte also immer echt größer beziehungsweise echt kleiner werden. Ist die Funktion dagegen „nur“ monoton, so können die Funktionswerte auch auf einem ganzen Intervall konstant bleiben.

Beachte: Ob eine Funktion monoton (oder streng monoton) ist, hängt entscheidend davon ab, auf welchem Definitionsbereich D man sie betrachtet. So bedeutet die Aussage „ f ist monoton“, dass f auf seinem *ganzen* Definitionsbereich D entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist. Wird nur ein bestimmter (kleinerer) Bereich D betrachtet (und nicht der komplette Definitionsbereich), so muss dies explizit mit angegeben werden, z.B. „ f ist monoton wachsend *auf* D “.

Beispiel 2.6.2 (a) Die Normalparabel $f(x) = x^2$ ist streng monoton wachsend auf $D = [0, \infty[$ und streng monoton fallend auf $D =] - \infty, 0]$.

Man beachte, dass hier 0 in beiden Fällen zu D dazugehört. Ist z.B. $x_1 = 0$ und $x_2 > 0$, so ist $f(x_1) = 0^2 = 0$ und $f(x_2) = x_2^2 > 0$ denn $x_2 > 0$. Also gilt tatsächlich $f(x_1) < f(x_2)$, d.h. die Definition für „streng monoton wachsend“ ist im Fall $D = [0, \infty[$ auch für $x_1 = 0$ erfüllt.

Betrachtet man die Funktion $f(x) = x^2$ aber auf dem maximalen Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$, also

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2,$$

dann ist f *nicht* monoton. Denn *auf ganz* \mathbb{R} ist $f(x) = x^2$ ja nicht monoton wachsend und auch nicht monoton fallend.

- (b) Ein Beispiel für eine Funktion die monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend ist, ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Die Funktion ist konstant auf dem Intervall $[a, b]$. Für $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ gilt also $f(x_1) = f(x_2)$. Damit ist in Definition 2.6.1 die Bedingung $f(x_1) \leq f(x_2)$ erfüllt (denn „ $=$ “ ist ja zugelassen), aber nicht $f(x_1) < f(x_2)$. f ist damit tatsächlich monoton wachsend, aber nicht streng monoton.

Ein konkretes Beispiel für eine solche Funktion ist etwa

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{für } x < 0 \\ 1, & \text{für } 0 \leq x < 2 \\ 1 + (x - 2)^2, & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

(Hier $a = 0$, $b = 2$.) Solche *abschnittsweise* definierten Funktion werden uns später noch begegnen.

Zwischen strenger Monotonie und Invertierbarkeit besteht folgender Zusammenhang:

Satz 2.6.3 *Ist die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, dann ist f invertierbar und die Umkehrfunktion f^{-1} ist ebenfalls streng monoton wachsend.*

Entsprechend gilt: Ist f streng monoton fallend, dann ist f invertierbar und f^{-1} ist streng monoton fallend.

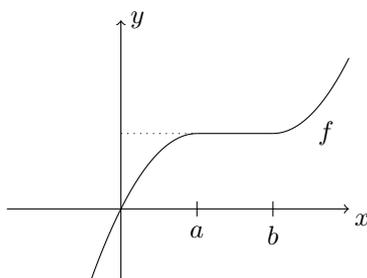


Abbildung 2.4: Eine monotone, aber nicht streng monotone Funktion

Beweis. Für die Invertierbarkeit müssen wir nur zeigen, dass f injektiv ist (siehe Definition 2.4.1 und die darauf folgende Bemerkung): Sei $x_1 \neq x_2$. Wir können dann annehmen, dass $x_1 < x_2$ gilt. Denn von den beiden verschiedenen Zahlen muss eine die kleinere sein. Und falls das x_2 wäre, tauschen wir einfach die Bezeichnungen. Ist jetzt f z.B. streng monoton wachsend, so folgt aus $x_1 < x_2$, dass $f(x_1) < f(x_2)$ gilt, also insbesondere $f(x_1) \neq f(x_2)$. Also gilt tatsächlich

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

d.h. f ist injektiv und damit umkehrbar.

Das dann die Umkehrfunktion auch wieder streng monoton wachsend (bzw. fallend) ist, sieht man (z.B.) an den Graphen von f und f^{-1} : Weil der eine durch Spiegeln des anderen an der Winkelhalbierenden $y = x$ entsteht, muss der eine streng monoton wachsend sein, sobald der andere es ist. Sie dazu den Graphen des nächsten Beispiels. \square

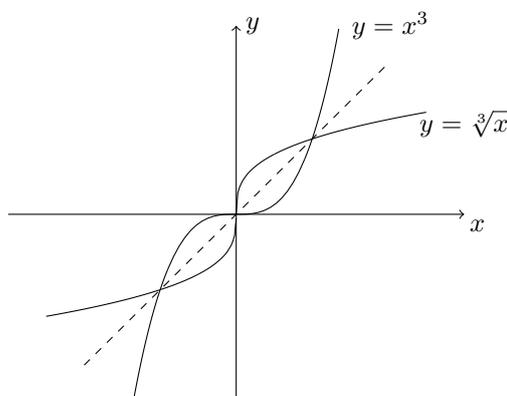
Beispiel 2.6.4 Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$$

ist streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion ist

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

(denn $y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$). f^{-1} ist wieder streng monoton wachsend.



Beachte: Allgemein ist die n . Wurzel $\sqrt[n]{a}$ einer positiven Zahl $a \geq 0$ die *positive* reelle Lösung der Gleichung $x^n = a$. Dabei ist $n \in \mathbb{N}^*$, d.h. $n \geq 1$. Es gilt also

$$x = \sqrt[n]{a} \iff x^n = a$$

für $x, a \geq 0$. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{81} &= 3 & \text{denn } 3^4 &= 81, \\ \sqrt[3]{125} &= 5 & \text{denn } 5^3 &= 125. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt immer

$$\sqrt[n]{a} \geq 0 \quad \text{für } a \geq 0.$$

Denn die Wurzel ist per Definition die positive Lösung. Zum Beispiel ist *immer* $\sqrt{9} = 3$ und *nie* $\sqrt{9} = -3$ oder $= \pm 3$, obwohl $(-3)^2 = 9$.

Das ist kein Widerspruch dazu, dass $x^2 = 9$ die beiden reellen Lösungen $x = 3$ und $x = -3$ hat. Denn es gilt für $x \in \mathbb{R}$ (wenn also $x < 0$ erlaubt ist)

$$x^2 = 9 \iff x = \pm\sqrt{9} \iff x = \pm 3,$$

wobei im zweiten Schritt $\sqrt{9} = 3$ (also $\sqrt{9} \geq 0$) eingesetzt wurde. Das \pm muss im ersten Schritt schon explizit dazu geschrieben werden: $x = \pm\sqrt{9}$.

Für *gerades* n und negatives $a < 0$ ist die Wurzel $\sqrt[n]{a}$ nicht definiert. Denn wenn n gerade ist, ist $x^n \geq 0$ für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$. Bei $a < 0$ hat deshalb die Gleichung $x^n = a$ keine reelle Lösung¹. Zum Beispiel ist $\sqrt{-2}$ nicht definiert, denn es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = -2$.

Bei *ungeradem* Exponenten n ist die Sache anders: Für $x < 0$ gilt dann auch $x^n < 0$. Die Gleichung $x^n = a$ hat für negatives $a < 0$ eine eindeutige Lösung $x < 0$, die n . Wurzel kann man damit wieder als diese Lösung definieren. Also gilt

$$x = \sqrt[n]{a} \iff x^n = a$$

bei ungeradem n für alle $x, a \in \mathbb{R}$. Zum Beispiel ist

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \quad \text{denn } (-2)^3 = -2^3 = -8.$$

Tatsächlich gilt für negatives a immer

$$a = -|a| \implies \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|} \quad (\text{wenn } n \text{ ungerade!})$$

Im Beispiel

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2.$$

¹Im Kapitel zu komplexen Zahlen werden wir sehen, wie man eine Gleichung wie $x^2 = -2$ doch lösen kann.

Kapitel 3

Trigonometrische Funktionen

In diesem Kapitel untersuchen wir die trigonometrischen Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens (auch Winkelfunktionen genannt) und ihre Umkehrfunktionen, die sogenannten Arcusfunktionen.

Hinweis: In den alten Mathematik A&B Skripten finden sie den Stoff dieses Kapitels im Skript Mathematik A, Kapitel 2.2.3–2.2.5.

3.1 Winkel im Bogenmaß

Eine Maßeinheit für Winkel ist das Grad, z.B. rechter Winkel = 90° . Es gibt aber auch eine andere Einheit für Winkel, das sogenannte *Bogenmaß*. Wie sich herausstellen wird, ist für trigonometrische Funktionen die mathematisch „richtige“ Winkeleinheit Bogenmaß, und nicht Grad.¹

Beim Bogenmaß wird ein Winkel durch die Länge des entsprechenden Kreisbogens im Einheitskreis (Kreis mit Radius 1) gemessen. Dazu trägt man den Winkel α von der positiven x -Achse aus gegen den Uhrzeigersinn im Einheitskreis ab. Der Winkel schneidet einen *Kreisbogen* aus dem Kreisrand heraus, siehe Abbildung 3.1 (Kreisbogen in blau). Das Bogenmaß von α ist dann gleich

¹Wir werden das an einem Beispiel im Kapitel über Grenzwerte sehen.

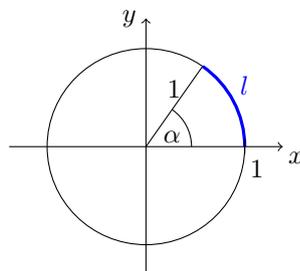


Abbildung 3.1: Das Bogenmaß eines Winkels am Einheitskreis

der Länge l des Kreisbogens:

α in Bogenmaß = Länge des Kreisbogens l im Einheitskreis.

Dem vollen Winkel von 360° entspricht also in Bogenmaß der komplette Kreisumfang, d.h. 2π (Umfang $2\pi r$ mit Radius $r = 1$). Damit erhält man als Formel für die Umrechnung zwischen Grad und Bogenmaß:

$$\alpha = \frac{2\pi}{360} \cdot \alpha_0 \quad \begin{array}{l} \alpha : \text{Winkel in Bogenmaß} \\ \alpha_0 : \text{Winkel in Grad} \end{array}$$

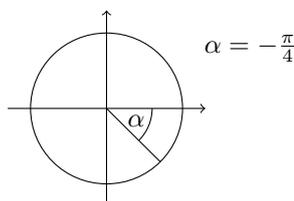
Einige Winkelwerte sind (Bogenmaß links, Grad rechts):

α	α_0
0	0°
$\frac{\pi}{2}$	90°
π	180°
$\frac{3\pi}{2}$	270°
2π	360°

Man betrachtet auch *negative Winkel*. Diese werden im Einheitskreis *im Uhrzeigersinn* abgetragen (d.h. in Abbildung 3.1 von der positiven x -Achse aus nach *unten*). Also:

$\alpha > 0$: Drehung gegen Uhrzeigersinn
 $\alpha < 0$: Drehung im Uhrzeigersinn

Als Beispiel stellen wir den Winkel $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ dar: Weil $\frac{\pi}{4} \hat{=} 45^\circ$ ist, entspricht somit $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ dem Winkel von 45° , aber im Uhrzeigersinn abgetragen:



Schließlich gibt es auch Winkel $\alpha > 2\pi$ und $\alpha < -2\pi$. Dabei wird der Kreis entsprechend mehrfach umlaufen. Ein Winkel kann damit jede reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ sein. Zum Beispiel bedeutet $\alpha = \frac{5\pi}{2}$ eine vollen Drehung um 2π gegen den Uhrzeigersinn *plus* der weiteren Drehung um $\frac{\pi}{2}$, denn

$$2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}.$$

Die beiden Winkel $\alpha = \frac{5\pi}{2}$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ergeben also in Abbildung 3.1 zwar denselben Punkt auf dem Einheitskreis. Es sind aber trotzdem verschiedene Winkel, denn der erste enthält ja noch die zusätzliche volle Drehung um 2π .

3.2 Sinus und Cosinus

Wir definieren die Funktionen Sinus und Cosinus nicht, wie vielleicht aus der Schule bekannt, über rechtwinklige Dreiecke, sondern am Einheitskreis. Das hat

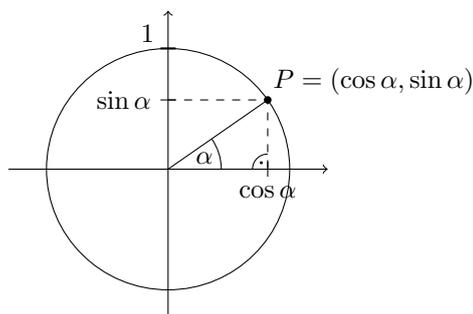


Abbildung 3.2: Definition von Sinus und Cosinus am Einheitskreis

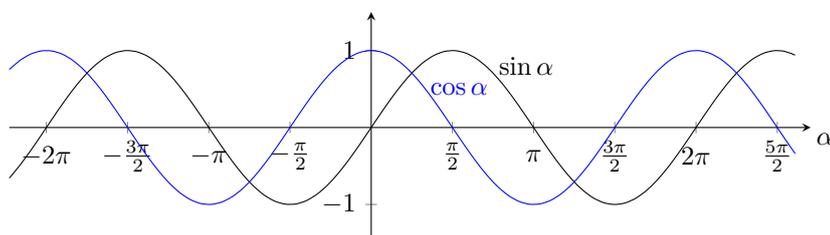


Abbildung 3.3: Die Graphen von Sinus und Cosinus

den Vorteil, dass $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ automatisch für alle Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert sind.²

Für die Definition trägt man den Winkel α im Einheitskreis ab und erhält so einen Punkt P auf dem Kreisrand. Dann ist $\cos \alpha$ die x -Koordinate von P und $\sin \alpha$ die y -Koordinate von P . Das ist in Abbildung 3.2 dargestellt.

An der Abbildung sieht man auch, dass für Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ die Längen von Ankathete und Gegenkathete des entstehenden rechtwinkligen Dreiecks genau gleich $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ sind. Die Definition am Einheitskreis stimmt also mit der bekannten Definition am rechtwinkligen Dreieck überein.

Durch die Abbildung 3.2 sind $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ nun für alle Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert. Daraus erhält man für Sinus und Cosinus die Graphen in Abbildung 3.3. Wir erläutern die Entstehung der Graphen:

Bei $\alpha = 0$ ist P der Punkt auf dem Kreisrand auf der positiven x -Achse (keine Drehung), also $P = (1, 0)$, denn der Kreisradius ist 1 . Der Cosinus ist die x -Koordinate, Sinus die y -Koordinate, also gilt

$$\cos(0) = 1, \quad \sin(0) = 0.$$

Vergrößert man jetzt den Winkel α , so wandert P auf dem Kreis gegen den Uhrzeigersinn, also nach oben und links. Die x -Koordinate $\cos \alpha$ wird somit kleiner, die y -Koordinate $\sin \alpha$ größer; das sieht man auch in den Graphen. Bei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (rechter Winkel) liegt dann P auf der positiven y -Achse, also $P = (0, 1)$.

²Die Definition am rechtwinkligen Dreieck liefert Cosinus und Sinus zunächst nur für Winkel $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, denn ein Kathetenwinkel im rechtwinkligen Dreieck kann nicht größer als ein rechter Winkel sein.

Damit ist

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

vergleiche wieder mit den Graphen. Wächst α nun weiter, d.h. P läuft weiter auf dem Kreis, so wird die x -Koordinate, also $\cos \alpha$, negativ, und die y -Koordinate $\sin \alpha$ wird wieder kleiner. Für $\alpha = \pi$ ist dann $P = (-1, 0)$, d.h.

$$\cos(\pi) = -1, \quad \sin(\pi) = 0.$$

Bei weiter wachsendem α wird nun $\cos \alpha$ wieder größer und $\sin \alpha$ wird negativ. Bei $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ ist dann $P = (0, -1)$, also

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1.$$

Schließlich erreichen wir bei $\alpha = 2\pi$ wieder den Ausgangspunkt $P = (1, 0)$, so dass

$$\cos(2\pi) = 1, \quad \sin(2\pi) = 0.$$

Betrachten wir nun $2\pi < \alpha \leq 4\pi$, so erhalten wir einen weiteren Umlauf von P auf dem Kreis, Cosinus und Sinus haben damit dieselben Werte wie für $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Das wiederholt sich erneut für $4\pi < \alpha \leq 6\pi$, und so weiter.

Betrachten wir nun noch $\alpha < 0$, so entspricht das dem Umlauf von P auf dem Kreis im Uhrzeigersinn. Wir erhalten damit wieder dieselben Werte von Cosinus und Sinus wie im Intervall $[0, 2\pi]$. Zum Beispiel sind in $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ die Werte die gleichen wie in $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, denn die Winkel liefern dieselben Punkte P , etwa $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi$.

3.3 Eigenschaften von Sinus und Cosinus

Da $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert sind, erhalten wir Funktionen

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Satz 3.3.1 *Die Funktionen \sin und \cos haben folgende Eigenschaften und Rechenregeln:*

(a) *Der Wertebereich von \sin und \cos ist $[-1, 1]$.*

(b) *\sin ist eine ungerade, \cos eine gerade Funktion,*

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha. \quad (3.1)$$

(c) *\sin und \cos sind 2π -periodisch:*

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha. \quad (3.2)$$

(d) *Bei Verschiebung um π ändert sich das Vorzeichen:*

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha, \quad \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha. \quad (3.3)$$

(e) *Bei Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ gehen Sinus und Cosinus ineinander über:*

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha. \quad (3.4)$$

(f) Es gilt

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad (3.5)$$

(wobei z.B. $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$).

(g) Einige Werte:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

(h) Sinus und Cosinus haben folgende Nullstellen:

$$\sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots \Leftrightarrow \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (3.6)$$

$$\cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \dots \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (3.7)$$

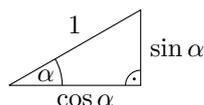
(i) Es gelten die Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta, \quad (3.8)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta. \quad (3.9)$$

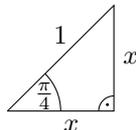
Beweis. Einige Hinweise zum Beweis:

- (a) Ergibt sich sofort aus dem Graphen.
- (b) Ebenfalls klar aus dem Graphen. Es folgt aber auch schön über die Definition am Einheitskreis, denn der Übergang von α zu $-\alpha$ entspricht der Spiegelung von P an der y -Achse, d.h. die y -Koordinate ($\sin \alpha$) ändert das Vorzeichen, die x -Koordinate ($\cos \alpha$) bleibt gleich.
- (c) Auch direkt klar am Einheitskreis, denn α und $\alpha + 2\pi$ ergeben denselben Punkt P .
- (d) Addition von π zu α bewirkt die Spiegelung von P am Ursprung. Dabei ändern sich die Vorzeichen von x und y , somit von \cos und \sin .
- (e) Kann man am Graphen erkennen: Die Funktion $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ „startet“ für $\alpha = 0$ mit dem Wert $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, fällt dann und erreicht bei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ den Wert $\sin(\pi) = 0$. Das sind genau die Funktionswerte von $\cos \alpha$ und man erkennt, dass auch der Verlauf dazwischen derselbe ist.
- (f) Nach Definition haben wir das rechtwinklige Dreieck



Der Satz von Pythagoras ergibt somit genau $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1^2$. Daher nennt man (3.5) auch „trigonometrischen Pythagoras“.

- (g) Die Werte für $\alpha = 0$ und $\frac{\pi}{2}$ haben wir schon beim Graphen gesehen. Die anderen Werte der Tabelle ergeben sich aus der Betrachtung der entsprechenden rechtwinkligen Dreiecke. Wir machen das hier für $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Dafür ergibt sich das gleichschenklige Dreieck



Nach Pythagoras folgt dann

$$x^2 + x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \sin \alpha = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- (h) Die Nullstellen kann man direkt aus dem Graphen ablesen.
 (i) Der Beweis der Additionstheoreme ist komplizierter, uns fehlt dafür hier das nötige Wissen.

□

Bemerkung: Allgemein nennt man eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *periodisch* mit Periode $L > 0$ (kurz *L-periodisch*) wenn gilt

$$f(x + L) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Sinus und Cosinus haben also die Periode $L = 2\pi$.

Die Formeln aus Satz 3.3.1 kann man benutzen, um konkrete Werte von Sinus und Cosinus auszurechnen, oder weitere nützliche Formeln herzuleiten:

Beispiel 3.3.2 (a) Wir wollen $\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right)$ ausrechnen. Dazu wenden wir solange passende Regeln aus Satz 3.3.1 an, bis wir den Werte aus der Tabelle in 3.3.1(g) ablesen können. Die jeweils angewandte Regel schreiben wir über das Gleichheitszeichen:

$$\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right) \stackrel{(3.1)}{=} -\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{3}\pi + \pi\right) \stackrel{(3.3)}{=} \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

- (b) Auch in der nächsten Rechnung benutzen wir die Regeln für Sinus und Cosinus; hier wollen wir aber den allgemeinen Ausdruck $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ vereinfachen. Eine Möglichkeit ist

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &\stackrel{(3.8)}{=} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(-\alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(-\alpha) \\ &= \cos(-\alpha) \stackrel{(3.1)}{=} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Wir haben hier das Additionstheorem (3.8) für Sinus verwendet. Stattdessen können wir aber auch so rechnen:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(-\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{(3.4)}{=} \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

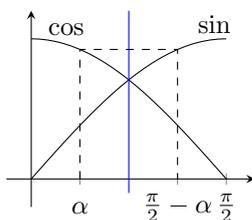


Abbildung 3.4: Symmetrie zwischen Sinus und Cosinus

Es gibt also mehr als nur einen Rechenweg. Graphisch können wir die erhaltene Formel so verstehen, siehe Abbildung 3.4: $\frac{\pi}{2} - \alpha$ hat zu $\frac{\pi}{2}$ denselben Abstand, wie α zu 0 (nämlich $|\alpha|$). Die beiden Zahlen α und $\frac{\pi}{2} - \alpha$ liegen daher symmetrisch zum Winkel $\frac{\pi}{4}$. Die Formel

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

bedeutet daher, dass Sinus und Cosinus zu einander spiegelsymmetrisch bezüglich der Symmetrieachse $\alpha = \frac{\pi}{4}$ sind (in der Abbildung in blau).

3.4 Tangens und Cotangens

Tangens und Cotangens können wir nun aus den schon bekannten Funktionen Sinus und Cosinus definieren. Der *Tangens* ist

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\text{für } \cos \alpha \neq 0) \quad (3.10)$$

Um nicht durch Null zu teilen, müssen wir hier die Nullstellen von Cosinus ausschließen, d.h. $\tan \alpha$ ist definiert für $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; in der Funktionschreibweise ist das

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Der Tangens hat folgende *Eigenschaften*:

- (a) \tan ist eine ungerade Funktion,

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$$

Denn nach (3.1) (sin ungerade, cos gerade Funktion) gilt

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha.$$

- (b) \tan ist π -periodisch,

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha.$$

Denn auf (3.3) folgt

$$\tan(\alpha + \pi) = \frac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \tan \alpha.$$

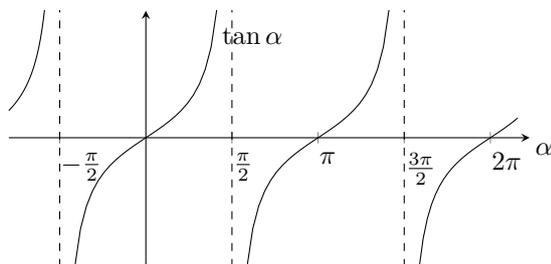


Abbildung 3.5: Graph der Tangens Funktion

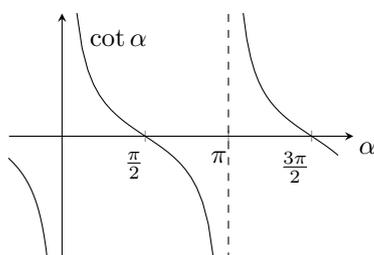


Abbildung 3.6: Die Cotangens Funktion

(Weil \sin und \cos 2π -periodisch sind, ist auch \tan automatisch 2π -periodisch, aber aus unserer Rechnung folgt eben, dass sich die Werte von $\tan \alpha$ schon nach π wiederholen, nicht erst nach 2π .)

- (c) Die Nullstellen von Tangens sind genau die Nullstellen des Sinus (denn ein Bruch wird Null genau dann, wenn der Zähler Null wird):

$$\tan \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$$

- (d) Aus der Tabelle der Sinus- und Cosinus-Werte ergeben sich sofort die Werte des Tangens:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.

Die *Cotangens-Funktion* ist genau der Kehrwert des Tangens:

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}. \quad (3.11)$$

Damit vertauschen sich gegenüber dem Tangens Definitionslücken und Nullstellen. Der Cotangens ist genau wie Tangens ungerade und π -periodisch. Die Graphen von Tangens und Cotangens sind in den Abbildungen 3.5 und 3.6 dargestellt.

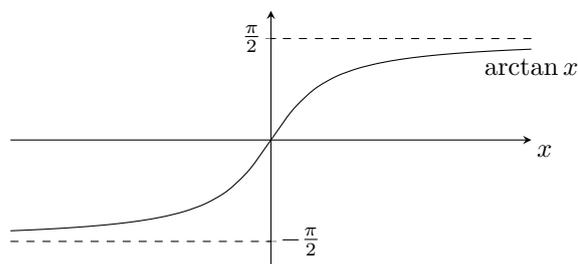


Abbildung 3.7: Die Funktion Arcustangens

3.5 Arcusfunktionen

Die Arcusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen. Da die trigonometrischen Funktionen aber periodisch sind, sind sie erstmal gar nicht umkehrbar; denn nach einer Periode wiederholen sich ja die Funktionswerte, verschiedene Winkel haben gleiche Funktionswerte, und damit sind die Funktionen nicht injektiv! Wir müssen sie daher vor dem Umkehren auf einen geeigneten Definitionsbereich einschränken (wie schon im Beispiel 2.4.2 bei der Parabel).

- (a) Aus dem Graphen der Tangens-Funktion sieht man, dass \tan auf dem Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ streng monoton wachsend ist, und damit nach Satz 2.6.3 invertierbar. Ebenfalls am Graphen sieht man, dass der Wertebereich \mathbb{R} ist. Also gilt

$$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ist streng monoton wachsend und bijektiv.}$$

Die Umkehrfunktion dazu heißt *Arcustangens*:

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

Es gilt damit also

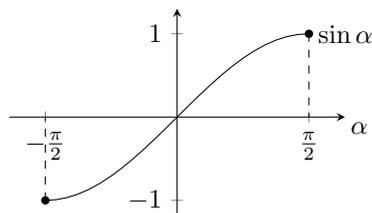
$$\tan \alpha = y \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arctan y \quad \text{für } \alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[. \quad (3.12)$$

Den Graphen von Arcustangens erhält man durch Spiegelung des Graphen von Tangens, *eingeschränkt auf* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, an der Winkelhalbierenden $y = \alpha$. Der Graph von \arctan ist in Abbildung 3.7 dargestellt.

- (b) Um die Sinus-Funktion umkehrbar zu machen, schränken wir sie auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ein, also den Bereich um Null, auf dem die Sinuswerte von -1 auf 1 wachsen. Wir haben also

$$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1] \quad \text{streng monoton wachsend, bijektiv.}$$

Im Graphen ist das



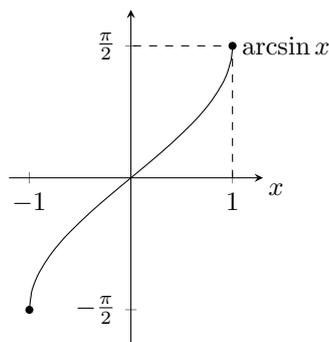
Die Umkehrung davon ist die Funktion *Arcussinus*:

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Es gilt

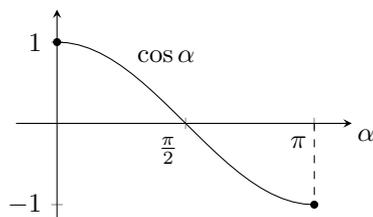
$$\sin \alpha = y \Leftrightarrow \alpha = \arcsin y \quad \text{für } \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], y \in [-1, 1]. \quad (3.13)$$

Den Graphen von Arcussinus erhält man wieder durch Spiegeln an der Winkelhalbierenden ($y = \alpha$):



- (c) Für die Umkehrung von \cos schränken wir auf den Winkelbereich $[0, \pi]$ ein. Dort ist \cos streng monoton fallend von 1 nach -1 :

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \quad \text{streng monoton fallend, bijektiv.}$$



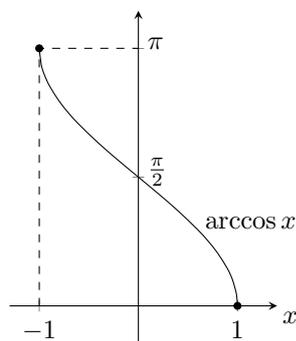
Die Umkehrfunktion heißt *Arcuscosinus*

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

und es gilt

$$\cos \alpha = y \Leftrightarrow \alpha = \arccos y \quad \text{für } \alpha \in [0, \pi], y \in [-1, 1]. \quad (3.14)$$

Der Graph ist



Beachte: Wichtig bei allen Arcusfunktionen ist, den korrekten Winkelbereich zu beachten, speziell beim Übergang zur Umkehrfunktion (3.12), (3.13), (3.14). So gilt z.B.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

(Denn aus $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ folgt $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ wegen (3.3) und (3.1).) Da nun \arcsin Werte im Winkelbereich $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ liefert und $\alpha = \frac{\pi}{3}$ in diesem Bereich liegt, $\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ist somit

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arcsin(y) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Dagegen ist $\frac{2\pi}{3} \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und damit $\frac{2\pi}{3}$ kein möglicher Wert des Arcussinus: $\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \neq \frac{2\pi}{3}$.

3.6 Polarkoordinaten

Polarkoordinaten sind eine alternative Möglichkeit, die Position eines Punktes in der Ebene zu beschreiben. Polarkoordinaten haben eine große Bedeutung in Anwendungen und auch in der Mathematik selbst, da sie zum Beispiel sehr gut Kreise und Drehungen beschreiben können. Zur Umrechnung von Polar- in normale kartesische Koordinaten können wir trigonometrischen Funktionen nutzen.

Sei (x, y) ein Punkt in der Ebene, $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Der Punkt wird also durch die *kartesischen* Koordinaten x und y beschrieben. In *Polarkoordinaten* wird der Punkt durch einen Radius r und einen Winkel φ beschrieben, die mit den kartesischen Koordinaten x, y in der Beziehung

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi \end{aligned} \tag{3.15}$$

stehen. Geometrisch ist das in Abbildung 3.8 veranschaulicht. Der Radius r in Polarkoordinaten ist gleich dem Abstand des Punktes (x, y) vom Koordinatenursprung. Der Winkel φ ist der Winkel zwischen positiver x -Achse und der „Radiuslinie“ vom Ursprung zum Punkt, gemessen gegen den Uhrzeigersinn, genau wie Abschnitt 3.1 zum Bogenmaß definiert. In dem rechtwinkligen Dreieck, das sich ergibt, ist r die Hypotenuse, x die Ankathete, und y die Gegenkathete.

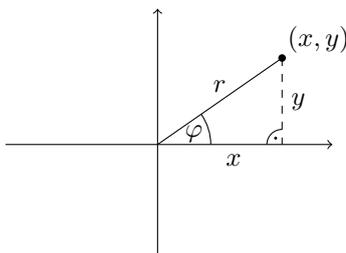


Abbildung 3.8: Polarkoordinaten eines Punktes

Die Gleichungen in (3.15) sind damit genau die (umgeformten) Beziehungen für Sinus und Cosinus im rechtwinkligen Dreieck:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{x}{r} && \Leftrightarrow && x = r \cos \varphi \\ \sin \varphi &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{y}{r} && \Leftrightarrow && y = r \sin \varphi\end{aligned}$$

Alternativ ergeben sich die Gleichungen (3.15) auch durch Skalierung der Definition von Sinus und Cosinus im Einheitskreis (Abbildung 3.2), von Radius 1 auf Radius r .

Mit (3.15) können wir aus gegebenen Polarkoordinaten r und φ die kartesischen Koordinaten x und y berechnen. Wie kommen wir aber von x, y zu r, φ ? Die Berechnung von r ist einfach: Der Satz des Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck ist $x^2 + y^2 = r^2$, und damit folgt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.16)$$

Die Berechnung des Winkels ist komplizierter. Zunächst ist φ nicht eindeutig, da die Funktionen \cos und \sin in (3.15) 2π -periodisch sind: $\varphi \pm 2\pi$ ergeben denselben Punkt (x, y) . Graphisch entspricht das einer kompletten weiteren Drehung um 2π (im oder gegen den Uhrzeigersinn). Außerdem ist für den Punkt $(0, 0)$, d.h. $x = y = 0$, der Winkel komplett unbestimmt. (Dreieck mit $r = 0$, (3.15) gilt für beliebige $\varphi \in \mathbb{R}$.)

Für Punkte $(x, y) \neq (0, 0)$, d.h. $r \neq 0$, ist der Winkel φ aber bis auf Vielfache von 2π festgelegt. Wählt man als Winkelbereich $\varphi \in]-\pi, \pi]$, so ist der Winkel φ eindeutig bestimmt und die Berechnung erfolgt mit

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right), & \text{falls } y \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right), & \text{falls } y < 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Die Formel ergibt sich aus

$$x = r \cos \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}.$$

Ist hier $\varphi \in [0, \pi]$ (was genau $y \geq 0$ entspricht), so liegt φ also im Winkelbereich des Arcuscosinus, vergleiche (3.14), und es folgt $\varphi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$. Im anderen Fall ist $\varphi \in]-\pi, 0[$ (d.h. $y < 0$). Dann liegt $-\varphi \in [0, \pi]$ im Bereich des Arcuscosinus, und wegen $\cos(-\varphi) = \cos \varphi = \frac{x}{r}$ folgt $-\varphi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$.

Bemerkung: Speziell in der Physik ist zur Berechnung des Polarwinkels φ eine Formel mit $\arctan(\frac{y}{x})$ bekannt. Eine vollständige korrekte Formel lautet hier

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{falls } x > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}, & \text{falls } x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{falls } x = 0, y < 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Sie liefert den Winkel φ im Bereich $] -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Die Formel $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ allein dagegen liefert nur den Bereich $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Und benutzt man diese Formel auch für Punkte mit $x < 0$, so erhält man sogar falsche Werte für φ !

Merke: Die Formel $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ gilt nur für $x > 0$.

Kapitel 4

Exponential- und Logarithmusfunktion

In diesem Kapitel geht es um Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$, also Potenzen mit der Variablen x im Exponent, und um ihre Umkehrfunktionen, die Logarithmusfunktionen.

Hinweis: In den alten Mathematik A&B Skripten finden sie den Stoff dieses Kapitels im Skript Mathematik A, Kapitel 2.2.6, 2.2.7.

4.1 Allgemeine Potenzen

Wie und für welche Zahlen a, b man eine Potenz a^b ausrechnen kann, hängt vor allem vom Exponenten b ab. Wir gehen hier kurz die verschiedenen Fälle durch, so wie man sie auch in der Schule kennengelernt hat.

Der erste, einfachste Fall ist eine natürliche Zahl n als Exponent, also a^n . Das ist das n -fache Produkt von a mit sich selbst; dabei kann a irgendeine reelle Zahl sein:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Ein Sonderfall, der sich nicht direkt aus der Formel ergibt, ist $n = 0$. Per Definition gilt immer

$$a^0 = 1. \quad (4.2)$$

Als nächstes geht man zu Brüchen im Exponenten über, dabei kommen dann Wurzeln ins Spiel. Es gilt

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad \text{für } n \in \mathbb{N}^*, a \geq 0. \quad (4.3)$$

Da die n . Wurzel ja im Allgemeinen nur für Zahlen größer oder gleich Null definiert ist, kann man diese Potenz auch nur für $a \geq 0$ berechnen.

Bringt man die beiden ersten Definitionen zusammen, kann man Potenzen mit einer beliebigen positiven rationalen Zahl $q = \frac{m}{n}$ als Exponenten berechnen:

$$a^q = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{für } q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, q \geq 0, a \geq 0. \quad (4.4)$$

Die Einschränkung $a \geq 0$ bleibt hier, weil man ja wieder eine Wurzel berechnen muss.

Für negative Exponenten ergibt sich die Potenz aus dem Kehrwert:

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q} \quad \text{für } a > 0. \quad (4.5)$$

Da man nicht durch Null teilen kann, gilt diese Formel nur noch für $a > 0$.

Somit können wir jetzt Potenzen a^b für alle rationalen Zahlen b als Exponent berechnen. Man kann nun noch weiter gehen, und als Exponent auch irgendeine *reelle* Zahl zulassen:

$$a^b \quad \text{für } a > 0, b \in \mathbb{R} \text{ bel.} \quad (4.6)$$

Die Einschränkung $a > 0$ gilt hier übrigens auch für positive reelle Zahlen b . Eine Formel, wie man a^b im Fall $b \in \mathbb{R}$ ausrechnen kann, sehen wir am Ende dieses Kapitels.

4.2 Die Exponentialfunktion

Die Funktion $\exp_a(x) = a^x$, wo also die Funktionsvariable x der Exponent ist, nennt man *Exponentialfunktion zur Basis a* . Da man in die Funktion reelle Zahlen x einsetzen möchte, sind wir hier im letzten Fall (4.6), d.h. die Basis a muss positiv reell sein: $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Die Potenz a^x ist damit für jedes $x \in \mathbb{R}$ definiert, der Definitionsbereich der Exponentialfunktion \exp_a ist also \mathbb{R} , d.h.

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = a^x. \quad (4.7)$$

Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:

- (a) Es gelten die *Potenzrechenregeln*, die aus der Schule bekannt sind. Dabei sind $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x \cdot a^y, & a^x b^x &= (ab)^x \\ (a^x)^y &= a^{xy}, & a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \\ \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y}, & \frac{a^x}{b^x} &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \end{aligned}$$

- (b) Es gilt

$$a^0 = 1, \quad 1^x = 1.$$

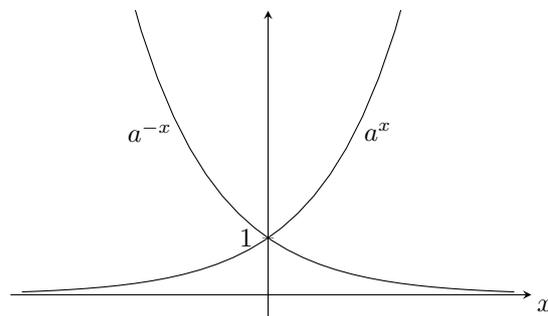
- (c) Die Exponentialfunktion hat immer echt positive Werte, d.h.

$$a^x > 0 \quad \text{für alle } a > 0, x \in \mathbb{R}.$$

- (d) Es gilt

$$x < y \quad \Rightarrow \quad a^x < a^y \quad \text{wenn } a > 1.$$

Für eine Basis $a > 1$ ist also \exp_a streng monoton wachsend.

Abbildung 4.1: Die Exponentialfunktionen a^x und a^{-x}

- (e) Hat man aber eine Basis echt kleiner als Eins, also b^x mit $0 < b < 1$, dann ist die Exponentialfunktion $\exp_b(x) = b^x$ streng monoton fallend. Denn die Zahl $b < 1$ kann man als $b = \frac{1}{a}$ mit $a > 1$ schreiben, und dann gilt

$$b^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x},$$

und das ist streng monoton fallend, denn a^x ist streng monoton wachsend. (Der Nenner a^x wird größer, also der Bruch $\frac{1}{a^x}$ kleiner.)

Die Graphen der Exponentialfunktionen a^x und a^{-x} ($= b^x$) mit $a > 1$ sind in Abbildung 4.1 dargestellt.

Es gibt eine *spezielle* Exponentialfunktion, bei der die Basis einen besonderen Wert hat:

$$\exp(x) = e^x \quad (4.8)$$

Die Basis ist die sogenannte *Eulersche Zahl*

$$e = 2.718281\dots$$

Die Exponentialfunktion zur Basis e hat eine besondere Bedeutung, wir werden das später an verschiedenen Stellen noch sehen. Spricht man von „der“ Exponentialfunktion (ohne Angabe einer Basis), so meint man meistens die Exponentialfunktion zur Basis e .

4.3 Der Logarithmus

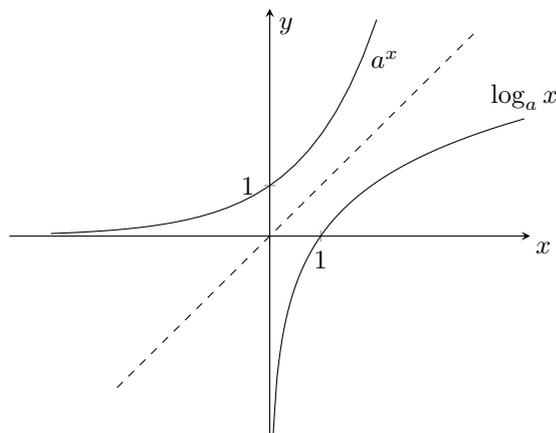
In diesem Abschnitt ist die Basis a immer eine Zahl größer als Eins, $a > 1$. Aus Eigenschaft (d) vom letzten Abschnitt wissen wir, dass bei $a > 1$ die Exponentialfunktion \exp_a streng monoton wachsend ist. Damit ist sie umkehrbar (Satz 2.6.3). Außerdem ist der Wertebereich $]0, \infty[$ (also alle $y > 0$), wie man am Graphen in Abbildung 4.1 sieht. Also ist

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[\quad \text{bijektiv.}$$

Die Umkehrfunktion von \exp_a heißt *Logarithmus zur Basis a*:

$$\log_a :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$a^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a(y) \quad (4.9)$$

Abbildung 4.2: Der Logarithmus zur Basis a

Da \exp_a streng monoton wachsend ist, ist auch der Logarithmus \log_a streng monoton wachsend. Den Graphen erhält man – wie immer – durch Spiegeln an der Gerade $y = x$, siehe Abbildung 4.2.

Für den Logarithmus gelten die folgenden Regeln:

Satz 4.3.1 *Es gilt (wobei $x, y > 0$, $a > 1$):*

$$(a) \log_a(1) = 0, \quad \log_a(a) = 1$$

$$(b) \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$$

$$(c) \log_a(x^y) = y \cdot \log_a x \quad (\text{hier } y \in \mathbb{R} \text{ erlaubt})$$

Beweis. Die Formeln ergeben sich als Umkehrung der Potenzrechenregeln:

(a) Es gilt $a^0 = 1$ und $a^1 = a$. Durch Anwendung der Umkehrung (4.9) folgt

$$a^0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \log_a(1)$$

$$a^1 = a \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \log_a(a)$$

(b) Zunächst ergibt sich aus der Potenzrechenregel für a^{x+y} mit (4.9)

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad \Leftrightarrow \quad x + y = \log_a(a^x a^y)$$

Definiert man jetzt neue Variablen

$$u = a^x, \quad v = a^y,$$

also äquivalent

$$x = \log_a u, \quad y = \log_a v,$$

so folgt durch Einsetzen

$$\log_a u + \log_a v = \log_a(uv).$$

Das ist die Regel für den Logarithmus eines Produkts. Aus

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \Leftrightarrow -x = \log_a \left(\frac{1}{a^x} \right)$$

folgt genauso durch Einsetzen

$$-\log_a(u) = \log_a \left(\frac{1}{u} \right),$$

die Regel für den Kehrwert. Die Regel für den Quotienten ergibt sich nun durch zusammensetzen der Regeln für Produkt und Kehrwert:

$$\log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a \left(u \cdot \frac{1}{v} \right) = \log_a u + \log_a \left(\frac{1}{v} \right) = \log_a u - \log_a v$$

(c) Aus der Regel für das Potenzieren einer Potenz folgt

$$a^{xy} = (a^x)^y \Leftrightarrow xy = \log_a((a^x)^y).$$

Ersetzt man hierin $u = a^x$, und damit $x = \log_a u$, so erhält man

$$\log_a(u) \cdot y = \log_a(u^y).$$

□

Für den Logarithmus mit der Eulerschen Zahl e als Basis gibt es eine besondere Schreibweise:

$$\ln x = \log_e x \tag{4.10}$$

Dieser Logarithmus wird auch *natürlicher Logarithmus* genannt. Wie schon bei „der“ Exponentialfunktion e^x , hat auch der natürliche Logarithmus besondere Eigenschaften, die ihn von Logarithmen mit anderer Basis unterscheiden. In der Mathematik ist daher der natürliche Logarithmus am gebräuchlichsten, Logarithmen zu anderen Basen werden nur in speziellen Situationen benutzt.

Die Rechenregeln von Satz 4.3.1 gelten genauso auch für den natürlichen Logarithmus. Insbesondere ist

$$\ln(e) = 1.$$

Mit dem Logarithmus kann man Gleichungen lösen, bei denen die gesuchte Variable im Exponenten steht.

Beispiel 4.3.2 Wir suchen die Lösung x der Gleichung

$$3^x = \pi \cdot 3^{-x}.$$

Die Lösung können wir berechnen, indem wir zuerst die ganze Gleichung *logarithmieren* (also den Logarithmus auf beide Seiten anwenden) und dann die Rechenregeln für den Logarithmus benutzen. Wir verwenden den natürlichen Logarithmus:

$$\begin{aligned} \ln(3^x) &= \ln(\pi \cdot 3^{-x}) && \Leftrightarrow x \cdot \ln 3 = \ln \pi + \ln(3^{-x}) \\ \Leftrightarrow x \cdot \ln 3 &= \ln \pi - x \cdot \ln 3 && \Leftrightarrow 2x \cdot \ln 3 = \ln \pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\ln \pi}{2 \cdot \ln 3} \end{aligned}$$

Mithilfe von Logarithmen ist es möglich, die allgemeine Exponentialfunktion a^x und den Logarithmus zur Basis a , $\log_a(x)$, allein aus dem natürlichen Logarithmus und e^x zu berechnen. Das zeigt, dass es letztlich langt, nur die Exponentialfunktion e^x und den natürlichen Logarithmus $\ln x$ zu „kennen“, d.h. zum Beispiel mit dem Taschenrechner oder Computer berechnen zu können. Die allgemeinen Potenzen und Logarithmen ergeben sich dann daraus nach folgenden Formeln:

Satz 4.3.3 *Es gilt*

$$a^x = e^{x \cdot \ln(a)}, \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}. \quad (4.11)$$

Beweis. Die erste Gleichung ergibt sich einfach durch Anwenden von Exponentialfunktion und Logarithmus auf a^x :

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln a}.$$

Im ersten Schritt wurde benutzt, dass e^x und $\ln x$ Umkehrfunktionen voneinander sind, also $e^{\ln y} = y$ gilt. Der zweite Schritt ist die Logarithmusregel für die Potenz.

Für die zweite Gleichung schreiben wir zuerst $y = \log_a x$. Unser Ziel ist es, y auszurechnen. Wegen

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

wollen wir also die Gleichung $a^y = x$ nach y auflösen. Das machen wir nun wie im letzten Beispiel auch durch Logarithmieren mit \ln :

$$a^y = x \quad \Leftrightarrow \quad \ln(a^y) = y \cdot \ln a = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{\ln x}{\ln a},$$

also $y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. □

Bemerkung: Mit der Formel für a^x in (4.11) haben wir übrigens jetzt die Frage vom Ende von Abschnitt 4.1 beantwortet, wie man eine Potenz berechnet, wenn der Exponent eine beliebige reelle Zahl ist.

Kapitel 5

Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen sind eine Erweiterung der Menge der reellen Zahlen, so wie schon die reellen Zahlen eine Erweiterung der rationalen Zahlen sind. Mit den reellen Zahlen wurden die rationalen Zahlen um unendliche nicht-periodische Dezimalbrüche erweitert, so dass etwa $\sqrt{2}$ dargestellt werden kann.

Die Erweiterung auf die komplexen Zahlen macht es nun möglich, *jede* quadratische Gleichung lösen zu können. Denn es gibt quadratische Gleichungen, die keine reellen Lösungen haben (also keine Lösungen, die reelle Zahlen sind). Es stellt sich dann heraus, dass mit komplexen Zahlen eine einheitliche Theorie für die Lösung quadratischer Gleichungen, und dann auch für die Nullstellen beliebiger Polynome möglich ist. Tatsächlich sind komplexe Zahlen in vielen Teilen der Mathematik – und auch in den Anwendungen – sehr nützlich. Erst mit den komplexen Zahlen sieht man in vielen Bereichen Zusammenhänge, die sonst nur versteckt oder komplizierter sind.

Hinweis: In den alten Mathematik A&B Skripten finden sie den Stoff dieses Kapitels im Skript Mathematik A, Kapitel 1.5, 2.2.5.

5.1 Definition komplexer Zahlen

Das einfachste Beispiel einer quadratischen Gleichung, die keine Lösung $x \in \mathbb{R}$ hat, ist¹

$$x^2 = -1.$$

Die Erweiterung der reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen geschieht nun dadurch, dass man *eine* neue Zahl „definiert“ (besser: einführt), die eine Lösung dieser Gleichung ist. Das ist die *imaginäre Einheit* j , für die per Definition gilt:

$$j^2 = -1. \tag{5.1}$$

Eine andere Bezeichnung für die imaginäre Einheit ist i statt j . In der Mathematik ist i die gebräuchliche Bezeichnung, in Anwendungsfächern, speziell der Elektrotechnik, wird aber auch oft j benutzt. Wir schreiben hier immer j .

Eine allgemeine *komplexe Zahl* wird nun definiert als

$$z = x + yj \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

¹Die Gleichung $x^2 = -1$ hat natürlich deswegen keine reelle Lösung, weil für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ immer $x^2 \geq 0$ gilt.

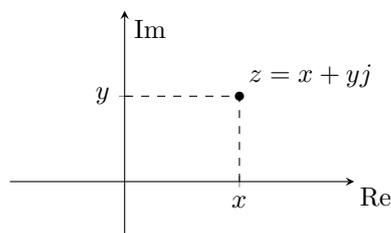


Abbildung 5.1: Die komplexe Zahlenebene

Die komplexen Zahlen sind also aufgebaut aus reellen Zahlen und der imaginären Einheit. Die Menge aller komplexen Zahlen ist dann

$$\mathbb{C} = \{x + yj \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Die beiden Komponenten x und y der komplexen Zahl z in (5.2) werden als *Realteil* und *Imaginärteil* von z bezeichnet, abgekürzt $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$. Also

$$\left. \begin{array}{l} x = \operatorname{Re} z \quad \text{Realteil} \\ y = \operatorname{Im} z \quad \text{Imaginärteil} \end{array} \right\} \text{ von } z = x + yj$$

Der Imaginärteil ist also die Zahl, die an der imaginären Einheit j steht. Zum Beispiel ist

$$z = 2 + 3j \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re} z = 2, \operatorname{Im} z = 3.$$

Beachte: Die imaginäre Einheit j selbst gehört *nicht* zum Imaginärteil dazu!

Die Schreibweise x und y für Real- und Imaginärteil legt es nah, komplexe Zahlen in einem Koordinatensystem darzustellen: Die Zahl $z = x + yj \in \mathbb{C}$ wird durch den Punkt (x, y) dargestellt, d.h. der Realteil ist die x -Koordinate, der Imaginärteil die y -Koordinate des Punktes. Die komplexen Zahlen bilden so die *komplexe Zahlenebene*, und entsprechend wird die waagerechte Achse als reelle Achse, die senkrechte als imaginäre Achse bezeichnet, siehe Abbildung 5.1.

Zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ sind gleich, wenn ihre Real- und Imaginärteile gleich sind:

$$z = w \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w \wedge \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$$

Auf diese Weise kann man eine komplexe Gleichung in ein System von zwei reellen Gleichungen umformen; wir sehen später ein Beispiel dafür.

In der allgemeinen Form (5.2) einer komplexen Zahl gibt es zwei Sonderfälle:

- Ist der Imaginärteil $\operatorname{Im} z = 0$, also $z = x + 0j$, so erhalten wir offenbar wieder die reelle Zahl x . Andersgesagt kann man jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ auch als komplexe Zahl schreiben:

$$x = x + 0j.$$

Somit sind alle reellen Zahl auch komplexe Zahlen, d.h. es gilt

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

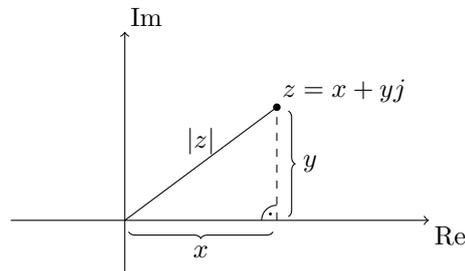


Abbildung 5.2: Der Betrag einer komplexen Zahl

- Eine komplexe Zahl z mit Realteil $\operatorname{Re} z = 0$, also

$$z = yj,$$

heißt *rein imaginär*.

Für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ wird der *Betrag* definiert durch die Gleichung

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5.3)$$

Nach dem Satz von Pythagoras ist damit Betrag $|z|$ genau der Abstand von z zum Ursprung in der komplexen Zahlenebene, siehe Abbildung 5.2.

5.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

Das Rechnen mit komplexen Zahlen erfolgt nach den gleichen Regeln wie für reelle Zahlen, unter zusätzlicher Beachtung der Gleichung $j^2 = -1$ für die imaginäre Einheit. Für Addition, Subtraktion und Multiplikation heißt das:

$$(x_1 + y_1j) \pm (x_2 + y_2j) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)j \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1j) \cdot (x_2 + y_2j) &= x_1x_2 + x_1y_2j + x_2y_1j + y_1y_2j^2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)j \end{aligned} \quad (5.5)$$

Es wird also ganz normal ausmultipliziert und dann die Terme mit beziehungsweise ohne j zusammengefasst. Mit dem Zeichen \pm in (5.4) werden beide Fälle Addition und Subtraktion in einer Gleichung zusammengefasst. Dabei ist \pm entweder komplett durch „+“ zu ersetzen (\rightarrow Addition) oder komplett durch „-“ (\rightarrow Subtraktion). Bei (5.5) wurde nach dem Ausmultiplizieren im zweiten Schritt $j^2 = -1$ verwendet, was $y_1y_2j^2 = -y_1y_2$ ergibt.

Beispiel 5.2.1 Wir berechnen Summe, Differenz und Produkt von $1 - 3j$ und $2 + j$:

$$\begin{aligned} (1 - 3j) + (2 + j) &= 3 - 2j \\ (1 - 3j) - (2 + j) &= -1 - 4j \\ (1 - 3j) \cdot (2 + j) &= 2 + j - 6j - \underbrace{3j^2}_{+3} = 5 - 5j \end{aligned}$$

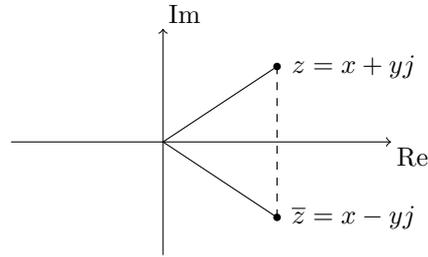


Abbildung 5.3: Das komplexe Konjugieren

Eine neue Rechenoperation für komplexe Zahlen ist die sogenannte komplexe Konjugation: Zu einer komplexen Zahl $z = x + yj$ ist die *konjugiert komplexe Zahl*

$$\bar{z} = x - yj. \quad (5.6)$$

Beim komplexen Konjugieren wird also einfach das Vorzeichen des Imaginärteils gewechselt. Zum Beispiel ist

$$\overline{2 + j} = 2 - j \quad \text{und} \quad \overline{-1 - 2j} = -1 + 2j.$$

In der komplexen Zahlenebene bedeutet das komplexe Konjugieren eine Spiegelung an der reellen Achse, siehe Abbildung 5.3.

Für die komplexe Konjugation und den Betrag gelten folgende Rechenregeln:

Satz 5.2.2 Für komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

- (a) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$
- (b) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- (c) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2j}(z - \bar{z})$
- (d) $|z| = \sqrt{z\bar{z}} \quad \text{d.h.} \quad |z|^2 = z\bar{z}$
- (e) $|\bar{z}| = |z|$
- (f) $|zw| = |z| \cdot |w|$
- (g) $|z + w| \leq |z| + |w| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$

Beweis. (a) und (b) ergibt sich direkt aus (5.4) und (5.5): ändert sich das Vorzeichen von y_1 und y_2 , so ändert sich auch im Ergebnis genau das Vorzeichen des Imaginärteils.

zu (c): Aus $z = x + yj$, $\bar{z} = x - yj$ folgt sofort

$$z + \bar{z} = 2x = 2 \operatorname{Re} z, \quad z - \bar{z} = 2yj = 2j \cdot \operatorname{Im} z$$

und damit (c).

(d) erhält man aus

$$z\bar{z} = (x + yj)(x - yj) = x^2 - y^2j^2 = x^2 + y^2 = |z|^2;$$

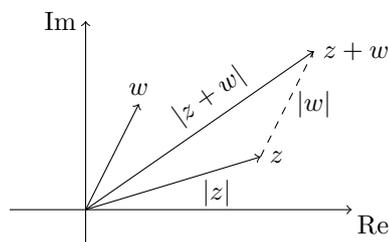


Abbildung 5.4: Zur Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen

durch Ziehen der Quadratwurzel folgt dann auch $\sqrt{z\bar{z}} = |z|$.

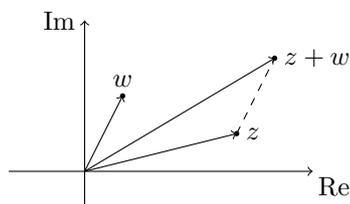
(e) ist klar nach der Definition des Betrags und (f) ist eine Konsequenz aus (b) und (d):

$$|zw|^2 = zw \cdot \overline{z\bar{w}} = zw\bar{z}\bar{w} = |z|^2|w|^2$$

Die Dreiecksungleichung (g) schließlich ergibt sich graphisch, was wir als nächstes erläutern. \square

Komplexe Zahlen als Vektoren

Man kann komplexe Zahlen auch als Vektoren in der komplexen Ebene auffassen: Der Zahl z entspricht der Vektor vom Nullpunkt des Koordinatensystems zum Punkt z . Der Betrag $|z|$ ist damit gleich der Länge des Vektors, siehe nochmal Abbildung 5.2. Und Addition zweier komplexer Zahlen z und w ergibt sich durch Hintereinanderhängen der Vektoren:



Bei der Addition $z + w$ entsteht also ein Dreieck in der komplexen Ebene. Die Dreiecksungleichung 5.2.2(g) ist nun eine Aussage über die Länge der komplexen Zahlen z , w und $z + w$ als Vektoren, und damit der Länge der entsprechenden Dreiecksseiten, siehe Abbildung 5.4: die Dreiecksseite $|z + w|$ kann nicht länger sein als die Summe der beiden anderen Seiten $|z| + |w|$. So erklärt sich auch der Name „Dreiecksungleichung“.

5.3 Kehrwert und Quotient

Für die Berechnung des Quotienten zweier komplexer Zahlen wird der Bruch mit dem konjugiert komplexen Nenner erweitert. Der Nenner wird dadurch reell und der Bruch kann berechnet bzw. vereinfacht werden. Wir zeigen das Verfahren zuerst für den Kehrwert $1/z$ einer komplexen Zahl $z \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Der Bruch wird also mit dem komplex konjugierten Nenner \bar{z} erweitert. Der Nenner wird dann zu $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ (siehe Satz 5.2.2), und damit reell. Man kann den Bruch dann ausrechnen. Wir machen die gleiche Umformung nochmal ausführlich, mit der allgemeinen Form einer komplexen Zahl $z = x + yj$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + yj} = \frac{x - yj}{(x + yj)(x - yj)} = \frac{x - yj}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}j$$

Mit dem letzten Schritt haben wir wieder eine komplexe Zahl in der Form (5.2) erhalten; anders gesagt haben wir Real- und Imaginärteil von $\frac{1}{z}$ ausgerechnet.

Bei einem Quotienten $\frac{w}{z}$ (also jetzt Zähler $\neq 1$) rechnet man genau so:

$$\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}$$

Beispiel 5.3.1 Wir berechnen den Quotienten von $1 - 3j$ und $2 + j$:

$$\frac{1 - 3j}{2 + j} = \frac{(1 - 3j)(2 - j)}{(2 + j)(2 - j)} = \frac{2 - j - 6j + 3j^2}{2^2 + 1^2} = \frac{-1 - 7j}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}j$$

Beachte: Im Beispiel mussten wir den erweiterten Nenner $(2 + j)(2 - j)$ nicht „von Hand“ ausmultiplizieren! Denn wegen der Formel $z\bar{z} = |z|^2$ wissen wir ja, dass der Nenner $|z|^2$ ist, also $(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$, also im Beispiel $2^2 + 1^2$.

Wir können jetzt noch die Rechenregeln 5.2.2 mit Formeln für den Quotienten vervollständigen:

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (5.7)$$

5.4 Lösung quadratischer Gleichungen mit komplexen Zahlen

Bei der Einführung der komplexen Zahlen haben wir die reell nicht lösbare Gleichung $x^2 = -1$ betrachtet, und für diese dann eine Lösung eingeführt, die imaginäre Einheit j . In diesem Abschnitt zeigen wir nun, dass man mit komplexen Zahlen tatsächlich *jede* quadratische Gleichung lösen kann.

Wir starten mit einer quadratischen Gleichung in Normalform (also mit dem Faktor 1 vor dem quadratischen Term²):

$$z^2 + pz + q = 0. \quad (5.8)$$

Da wir komplex rechnen wollen, haben wir die Unbekannte direkt als z geschrieben. Um die Gleichung zu lösen, vereinfachen wir sie zuerst mit quadratischer Ergänzung:

$$z^2 + pz + q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + pz + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q \quad \Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

²Eine allgemeine quadratische Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ bringt man zuerst durch Teilen mit a auf Normalform.

Mit der Substitution $w = z + \frac{p}{2}$ ist das äquivalent zu

$$z = -\frac{p}{2} + w \quad \text{wobei} \quad w^2 = \frac{p^2}{4} - q. \quad (5.9)$$

Wir suchen also die Lösungen w der Gleichung $w^2 = \frac{p^2}{4} - q$, und erhalten dann daraus durch $z = -\frac{p}{2} + w$ die Lösungen der ursprünglichen quadratischen Gleichung (5.8). Wenn wir jetzt noch die Abkürzung

$$a = \frac{p^2}{4} - q$$

eingeführen, haben wir das Problem damit soweit reduziert, dass wir die Lösungen w der Gleichung

$$w^2 = a \quad (5.10)$$

berechnen müssen. Sind p und q in der Ausgangsgleichung (5.8) reell, so ist auch a eine reelle Zahl. Wir werden aber sehen, dass wir auch für komplexes $a \in \mathbb{C}$ die Lösungen von (5.10) berechnen können; damit dürfen dann in (5.8) auch die Koeffizienten p, q komplex sein.

Bemerkung: Wenn wir *formal* die Lösungen von (5.10) als Wurzel $\pm\sqrt{a}$ schreiben, also

$$w = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

bekommen wir für die Lösung z von (5.8)

$$z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

also die bekannte „ p - q -Formel“ für quadratische Gleichungen. Die Schreibweise \sqrt{a} ist aber problematisch, weil „die“ Wurzel einer negativen (oder komplexen) Zahl nicht eindeutig festgelegt ist: z.B. hat $w^2 = -1$ die beiden Lösungen $w = j$ und $w = -j$ (denn $(-j)^2 = j^2 = -1$), aber die Lösung j ist erstmal nicht „besser“ als die Lösung $-j$, jedenfalls aus mathematischer Sicht. Es ist also nicht $\sqrt{-1} = j$ weil man genauso gut $\sqrt{-1} = -j$ hätte sagen können.

Die Sache ist anders bei der Wurzel einer positiven Zahl: Die Gleichung $w^2 = 4$ hat die beiden Lösungen $w = 2$ und $w = -2$. Hier ist $\sqrt{4} = 2$ (und nie(!) $= -2$, siehe auch Seite 36), weil die beiden reellen Lösungen mit „ $<$ “ angeordnet werden können: es gilt $-2 < 2$ und man nimmt für $\sqrt{4}$ die größere Lösung, also eben $\sqrt{4} = 2$.

Die Lösungen j und $-j$ von $w^2 = -1$ kann man dagegen nicht mit „ $<$ “ ordnen, denn für komplexe Zahlen, also in der komplexen Zahlenebene gibt es keine „ $<$ “-Beziehung.³

Wir schauen uns jetzt an, wie wir konkret die Lösungen von $w^2 = a$ berechnen können. Dabei unterscheiden wir die Fälle, ob a reell oder komplex ist:

³In der Funktionentheorie (Thema in Mathematik C) findet man schließlich doch einen Weg, die komplexe Wurzelfunktion sauber zu definieren. Aber auch dann gibt es zwei gleichberechtigte Definitionen, wobei im einen Fall $\sqrt{-1} = j$, im anderen Fall aber $\sqrt{-1} = -j$ gilt!

1. $a \in \mathbb{R}$.

Hier können wir noch weiter unterscheiden ob $a \geq 0$ oder $a < 0$ ist und erhalten dann die Lösungen

$$a \geq 0 \quad \Rightarrow \quad w = \pm\sqrt{a} \quad (5.11)$$

$$a < 0 \quad \Rightarrow \quad w = \pm\sqrt{|a|} \cdot j \quad (5.12)$$

Für $a \geq 0$ sind das natürlich die schon bekannten reellen Lösungen $\pm\sqrt{a} \in \mathbb{R}$. Für den Fall $a < 0$ erhalten wir dagegen rein imaginäre Lösungen. Wir machen noch die Probe, dass die Formel in (5.12) tatsächlich die Lösung ist:

$$\left(\pm\sqrt{|a|}j\right)^2 = \left(\sqrt{|a|}\right)^2 \cdot j^2 = |a| \cdot j^2 = -|a| = a$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass $a < 0$ und deswegen $|a| = -a$ ist.

Als Beispiel lösen wir $w^2 = -3$:

$$w^2 = -3 \quad \Leftrightarrow \quad w = \sqrt{3}j \vee w = -\sqrt{3}j$$

2. $a \in \mathbb{C}$.

Wir schreiben die gesuchte Lösung in der allgemeinen Form einer komplexen Zahl $w = x + yj$. Setzen wir das in $w^2 = a$ ein, erhalten wir

$$w^2 = (x + yj)^2 = x^2 + 2xyj + y^2j^2 = x^2 - y^2 + 2xyj \stackrel{!}{=} a.$$

Das Ausrufungszeichen „!“ über dem letzten Gleichheitszeichen bedeutet, dass dies noch unser Ziel ist: Wir wollen x und y so bestimmen, dass die letzte Gleichheit erfüllt ist. Weil es eine Gleichheit von komplexen Zahlen ist, können wir auch äquivalent sagen, dass Real- und Imaginärteil gleich sein müssen:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \operatorname{Re} a \\ 2xy = \operatorname{Im} a \end{cases} \quad (5.13)$$

Dies ist ein Gleichungssystem für die gesuchten Variablen x und y . Das Gleichungssystem ist reell, wir haben also das komplexe Problem auf ein reelles zurückgeführt. Allerdings ist das Gleichungssystem auch nicht-linear (wegen den Termen x^2 , y^2 und xy), was die Lösung etwas schwieriger macht.

Beispiel 5.4.1 Als Beispiel für den zweiten Fall $a \in \mathbb{C}$ wollen wir die Lösungen von

$$w^2 = j$$

berechnen. Wir beginnen wieder mit dem Ansatz $w = x + yj$ und nehmen dann Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned} w^2 = (x + yj)^2 &= x^2 - y^2 + 2xyj \stackrel{!}{=} j \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung $2xy = 1$ folgt, dass $x, y \neq 0$ und

$$y = \frac{1}{2x}.$$

Setzen wir das in die erste Gleichung ein, ergibt sich

$$x^2 - \left(\frac{1}{2x}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = \frac{1}{4},$$

und nach Ziehen der Quadratwurzel

$$x^2 = \frac{1}{2}.$$

(Man beachte hier, dass $x^2 = -\frac{1}{2}$ nicht möglich ist, denn x ist reell und daher $x^2 \geq 0$.) Wir erhalten damit für x die beiden Lösungen

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Aus der Beziehung $y = \frac{1}{2x}$ von oben erhalten wir dann für jeden der beiden x -Werte den entsprechenden y -Wert:

$$y_1 = \frac{1}{2x_1} = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y_2 = \frac{1}{2x_2} = \frac{1}{2} (-\sqrt{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Setzen wir das jetzt in $z = x + yj$ ein, bekommen wir schließlich

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}j, \quad w_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}j$$

als die beiden Lösungen von $w^2 = j$.

5.5 Polarform komplexer Zahlen

Wir haben die komplexen Zahlen in der Form

$$z = x + yj$$

eingeführt. Dies nennt man auch die *kartesische Form* einer komplexen Zahl, weil sie die kartesischen Koordinaten x und y des Punkts in der komplexen Ebene enthält. Wir können den Punkt (x, y) aber auch in Polarkoordinaten beschreiben, wie in Abschnitt 3.6 erklärt. Setzen wir die Formel (3.15) für Polarkoordinaten in die kartesische Form von z ein, bekommen wir

$$z = r \cos \varphi + j \cdot r \sin \varphi = r \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi). \quad (5.14)$$

Für den Radius r ergibt sich dabei

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|;$$

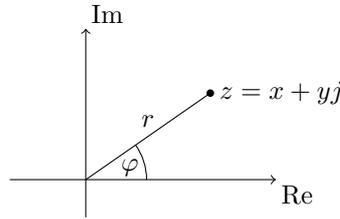


Abbildung 5.5: Komplexe Zahl in Polarkoordinaten

der Radius ist also genau gleich dem Betrag der komplexen Zahl (siehe (3.16) und (5.3)). Den Winkel φ nennt man auch *Argument* der komplexen Zahl z , geschrieben

$$\varphi = \arg z.$$

Wie schon bei Polarkoordinaten ist der Winkel φ nicht eindeutig – Addition oder Subtraktion von 2π ergeben dieselbe Zahl z . Die Polarkoordinaten der komplexen Zahl z sind in Abbildung 5.5 dargestellt.

Die Formel (5.14) für komplexe Zahlen in Polarkoordinaten lässt sich noch entscheidend vereinfachen durch die *Formel von Euler*:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi. \quad (5.15)$$

Der Term $e^{j\varphi}$ in dieser Formel ist hier erstmal nur als Abkürzung für die rechte Seite zu lesen; dass die Schreibweise als Potenz wirklich sinnvoll ist, sehen wir in den Rechenregeln von Satz 5.5.2. Setzen wir die Eulerformel (5.15) in (5.14) ein, erhalten wir

$$z = r e^{j\varphi}. \quad (5.16)$$

Das ist die *Polarform* der komplexen Zahl z , wobei

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

Wir erklären an zwei Beispielen, wie man zwischen der kartesischen und der Polarform einer komplexen Zahl umrechnet:

Beispiel 5.5.1 (a) Gegeben ist

$$z = e^{j\frac{\pi}{3}}.$$

Das ist also eine Polarform mit $r = 1$ (also $|z| = 1$) und Winkel $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Unser Ziel ist, z in die kartesische Form $z = x + yj$ umzurechnen. Dazu brauchen wir nur die Eulerformel (5.15) einzusetzen und dann die Cosinus- und Sinuswerte zu bestimmen:

$$z = e^{j\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}j.$$

Die Zahl ist in Abbildung 5.6 links dargestellt.

(b) Jetzt ist eine Zahl in kartesischer Form gegeben,

$$z = -1 - j.$$

Wir suchen die Polarform. Zuerst berechnen den Radius aus dem Betrag von z :

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Um den Winkel (das Argument) φ zu berechnen, verwenden wir die Formel für den Polarkoordinatenwinkel (3.17):

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right), & y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right), & y < 0 \end{cases}$$

Beachte, dass hier $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $r = |z|$, also

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right), & \operatorname{Im} z \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right), & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

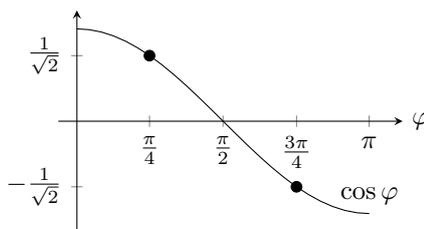
In unserem Beispiel ist

$$\operatorname{Im} z = y = -1 < 0,$$

also sind wir im zweiten Fall von (5.17):

$$\varphi = -\arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right) = -\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3\pi}{4}.$$

Wir erläutern die Berechnung des Arcuscossinus im letzten Schritt: Der Arcuscossinus ist die Umkehrfunktion des Cosinus im Winkelbereich $[0, \pi]$. Aus der Tabelle der Cosinuswerte (in Satz 3.3.1) wissen wir $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Am Verlauf vom Cosinus auf dem Intervall $[0, \pi]$



sieht man dann, dass $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. (Punktsymmetrie zu $\varphi = \frac{\pi}{2}$!) Also folgt $\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$, d.h.

$$\varphi = -\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3\pi}{4}.$$

Mit den berechneten Werten $r = \sqrt{2}$ und $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ ist die gesuchte Polarform von z damit

$$z = \sqrt{2} e^{-\frac{3\pi}{4}j}.$$

In Abbildung 5.6 ist das in der rechten Skizze gezeigt.

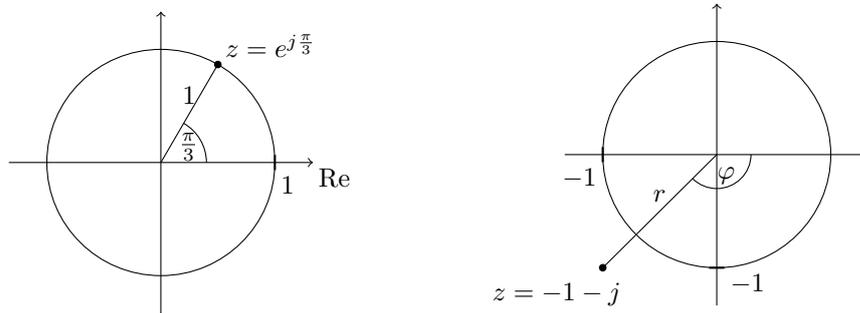


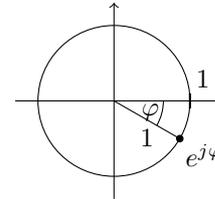
Abbildung 5.6: Die komplexen Zahlen von Beispiel 5.5.1

Anhand der Grafik kann man übrigens direkt ablesen, ob der berechnete Winkel φ im richtigen Bereich liegt: Da $z = -1 - j$ unterhalb der reellen Achse liegt, läuft der Winkel „unten herum“, d.h. im Uhrzeigersinn, d.h. der Winkel ist negativ. Ausßerdem ist der Winkel offenbar größer als ein rechter Winkel, also (ohne das Vorzeichen) im Bereich von $\frac{\pi}{2}$ bis π . Mit dem negativen Vorzeichen ergibt das einen Winkel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $-\pi$, was zu unserem Ergebnis $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ passt.

Der folgende Satz enthält einige Eigenschaften und Rechenregeln für die komplexe Exponentialfunktion $e^{j\varphi}$. Die Regeln zeigen insbesondere, dass sich $e^{j\varphi}$ tatsächlich wie eine Exponentialfunktion verhält; die Schreibweise aus der Eulerformel (5.15) ist daher gerechtfertigt.

Satz 5.5.2 *Es gilt (mit $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$):*

(a) $|e^{j\varphi}| = 1$ d.h. $e^{j\varphi}$ liegt auf dem Einheitskreis:



(b) $e^{j\varphi+\psi} = e^{j\varphi} \cdot e^{j\psi}$

(c) $e^{jk\varphi} = (e^{j\varphi})^k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

(d) $\overline{e^{j\varphi}} = e^{-j\varphi} = \frac{1}{e^{j\varphi}}$

(e) $e^{j\frac{\pi}{2}} = j, \quad e^{j\pi} = -1$

(f) $\cos \varphi = \operatorname{Re} e^{j\varphi} = \frac{1}{2} (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}), \quad \sin \varphi = \operatorname{Im} e^{j\varphi} = \frac{1}{2j} (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})$

Beweis.

(a) Nach der Definition von $e^{j\varphi}$ in der Eulerformel ist $\operatorname{Re} e^{j\varphi} = \cos \varphi$, $\operatorname{Im} e^{j\varphi} = \sin \varphi$. Der Betrag ist damit

$$|e^{j\varphi}| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$

nach dem trigonometrischen Pythagoras (3.5).

- (b) Wir beginnen auf der rechten Seite der Formel, setzen für $e^{j\varphi}$ und $e^{j\psi}$ jeweils die Eulerformel ein, multiplizieren aus und benutzen schließlich die Additionstheoreme (3.8) und (3.9):

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} \cdot e^{j\psi} &= (\cos \varphi + j \sin \varphi) \cdot (\cos \psi + j \sin \psi) \\ &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi + j(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi) \\ &= \cos(\varphi + \psi) + j \sin(\varphi + \psi) = e^{j(\varphi + \psi)} \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Eulerformel für $\varphi + \psi$ verwendet.

- (c) und (d) ergeben sich aus (b) und der Eulerformel. Zum Beispiel

$$\begin{aligned} e^{j \cdot 2\varphi} &= e^{j(\varphi + \varphi)} \stackrel{(b)}{=} e^{j\varphi} \cdot e^{j\varphi} = (e^{j\varphi})^2, \\ e^{-j\varphi} &= \cos(-\varphi) + j \sin(-\varphi) = \cos \varphi - j \sin \varphi = \overline{e^{j\varphi}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} \cdot e^{-j\varphi} &\stackrel{(b)}{=} e^{j(\varphi - \varphi)} = e^{j \cdot 0} = \cos 0 + j \sin 0 = 1 \\ \Rightarrow e^{-j\varphi} &= \frac{1}{e^{j\varphi}} = (e^{j\varphi})^{-1} \end{aligned}$$

- (e) direkt ausrechnen

- (f) folgt aus den allgemeinen Formeln für den Real- und Imaginärteil in Satz 5.2.2(c) und $\overline{e^{j\varphi}} = e^{-j\varphi}$.

□

5.6 Produkte und Potenzen in Polarform

In der kartesischen Form $z = x + jy$ sind Addition und Subtraktion komplexer Zahlen sehr einfach, die Multiplikationsformel (5.5) ist dagegen komplizierter. In der Polarform dagegen ist das Multiplizieren und Potenzieren besonders einfach: Sind

$$z = |z| e^{j\varphi}, \quad w = |w| e^{j\psi}$$

zwei Zahlen in Polarform, dann können wir ihr Produkt einfach so berechnen:

$$zw = |z||w| e^{j\varphi + j\psi}. \quad (5.18)$$

Dabei haben wir die Regel $e^{j\varphi} e^{j\psi} = e^{j(\varphi + \psi)}$ aus dem letzten Satz benutzt. Gleichung (5.18) besagt, dass beim Multiplizieren in Polarform die Beträge multipliziert und die Winkel addiert werden. Grafisch ist das in Abbildung 5.7 veranschaulicht. Dort sieht man, wie an der Zahl w mit Winkel ψ der Winkel φ (von z) abgetragen wird, um zum Produkt zw mit Winkel $\varphi + \psi$ zu kommen.

Wichtig ist der Spezialfall $|z| = 1$: In dem Fall ändert sich der Betrag durch die Multiplikation mit z nicht (Multiplikation mit 1), es wird nur der Winkel φ addiert. Die Multiplikation mit $e^{j\varphi}$ entspricht also einer Drehung um den Winkel φ .

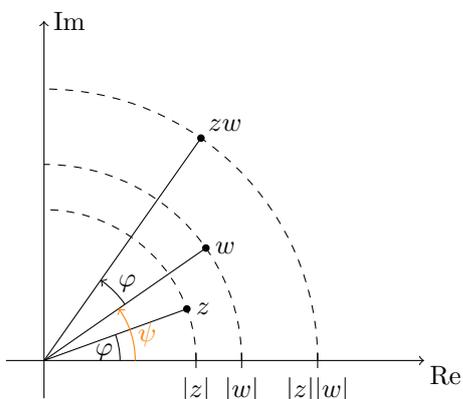


Abbildung 5.7: Die Multiplikation komplexer Zahlen in Polarform

Multiplikation mit $e^{j\varphi} \hat{=} \text{Drehung um } \varphi$

Für den Quotienten $\frac{z}{w}$ und die Potenz z^n in Polarform gelten folgende Formeln:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} e^{j(\varphi-\psi)}, \quad z^n = |z|^n e^{jn\varphi}. \quad (5.19)$$

Die Formeln ergeben sich wieder aus den Rechenregeln für $e^{j\varphi}$, beim Quotienten z. B.

$$\frac{z}{w} = \frac{|z| e^{j\varphi}}{|w| e^{j\psi}} = \frac{|z|}{|w|} e^{j\varphi} e^{-j\psi} = \frac{|z|}{|w|} e^{j(\varphi-\psi)}.$$

5.7 Komplexe Wurzeln in Polarform

In Abschnitt 5.4 haben wir die Gleichung $w^2 = a$ gelöst, also Quadratwurzeln berechnet. Wir haben dabei kartesisch gerechnet. Da wir aber gerade gesehen haben, dass das Potenzieren in Polarform besonders einfach ist, ist es nicht sehr überraschend, dass sich auch komplexe Wurzeln besonders gut in Polarform berechnen lassen.

Beim Potenzieren z^n wird der Betrag potenziert, der Winkel mit n multipliziert, siehe die zweite Gleichung in (5.19). Beim Berechnen der n . komplexen Wurzel wird daher entsprechend die n . Wurzel des Betrags gezogen (d.h. mit $\frac{1}{n}$ potenziert) und der Winkel durch n geteilt. Genauer gilt:

Satz 5.7.1 Sei $z = re^{j\varphi}$ eine komplexe Zahl in Polarform und $n \in \mathbb{N}^*$. Dann hat die Gleichung $w^n = z$ die n verschiedenen Lösungen

$$w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{j\frac{\varphi}{n}} e^{j\frac{2\pi k}{n}} \quad \text{mit } k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.20)$$

Beweis. Wir machen die Probe, dass w_k die Gleichung $w^n = z$ erfüllt:

$$(w_k)^n = r^{\frac{1}{n} \cdot n} e^{j\frac{\varphi}{n} \cdot n} e^{j\frac{2\pi k}{n} \cdot n} = r e^{j\varphi} e^{j2\pi k} = z.$$

Im letzten Schritt haben wir $e^{2\pi k j} = 1$ benutzt. Beachte dazu, dass $e^{2\pi k j}$ eine komplexe Zahl auf dem Einheitskreis ist, die den Winkel $2\pi k$ hat. Der Winkel

$2\pi k$ entspricht dem Winkel 0, d.h. die Zahl liegt auf der positiven reellen Achse und ist damit gleich 1. \square

Die Gleichung $w^n = z$ hat also n Lösungen oder anders gesagt, es gibt n verschiedene n . Wurzeln von z . Dem entspricht, dass die quadratische Gleichung $w^2 = z$ zwei Lösungen hat.

Die Formel (5.20) können wir noch etwas anders schreiben: Der einzige Term, der von der Variable k abhängt, ist $e^{j\frac{2\pi k}{n}}$. Wir kürzen diesen Term mit ζ_k ab. Damit sind die n . Wurzeln von z gleich

$$w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{j\frac{\varphi}{n}} \zeta_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.21)$$

Die Zahlen

$$\zeta_k = e^{j\frac{2\pi k}{n}} \quad (5.22)$$

nennt man n . *Einheitswurzeln*. Der Name kommt daher, dass $\zeta_k^n = 1$ gilt, d.h. die ζ_k sind n . Wurzeln der Eins. Die n verschiedenen Einheitswurzeln $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}$ „erzeugen“ somit in (5.21) die n verschiedenen Wurzeln von z .

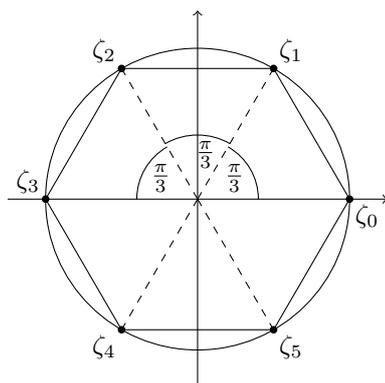
Beispiel 5.7.2 Wir skizzieren die Einheitswurzeln für den Fall $n = 6$, d.h. die sechsten Einheitswurzeln. Ihre Werte sind

$$\zeta_k = e^{j\frac{2\pi k}{6}} = e^{j\frac{\pi}{3} \cdot k}, \quad k = 0, \dots, 5.$$

Sie liegen auf dem Einheitskreis ($|\zeta_k| = 1$) mit Winkel $\frac{\pi}{3} \cdot k$ wobei $k = 0, \dots, 5$, also

$$\zeta_0 = e^0 = 1, \quad \zeta_1 = e^{j\frac{\pi}{3}}, \quad \zeta_2 = e^{j\frac{2\pi}{3}}, \quad \zeta_3 = e^{j\pi} = -1, \quad \zeta_4 = e^{j\frac{4\pi}{3}}, \quad \zeta_5 = e^{j\frac{5\pi}{3}}.$$

Ausgehend von $\zeta_0 = 1$ kommt man also nacheinander zu den anderen ζ_k , indem man immer wieder den Winkel $\frac{\pi}{3}$ dazu addiert, d.h. immer um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ weiter dreht. Die sechsten Einheitswurzeln bilden damit genau die Ecken eines regelmäßigen Sechsecks:



Man lässt dabei also alle Unbekannten x_j (und die Pluszeichen) weg, und statt den Gleichheitszeichen notiert man einen senkrechten Strich. Die Schreibweise $(A|b)$ deutet dabei an, dass links vom senkrechten Strich die Matrix A der Koeffizienten a_{ij} der linken Seite steht, und rechts der Vektor mit den Zahlen b_i .

Man beachte noch die Konvention für die Nummerierung der a_{ij} , d.h. die Reihenfolge der Indizes: Der erste Index i gibt die *Zeilennummer* an, der zweite Index j die *Spaltennummer*.

6.2 Elementare Zeilenumformungen

Um ein Gleichungssystem zu lösen, führt man Umformungen durch, die das System auf eine einfache Form bringen, aus der man die gesuchten Variablen x_j dann berechnen kann. Um dabei die Lösungsmenge nicht zu verändern, müssen die Umformungen umkehrbar, d.h. Äquivalenzumformungen sein. Für folgende Typen von Umformungen ist das so, man nennt sie *elementare Zeilenumformungen*:

- (1) Addition eines Vielfachen einer Zeile i zu einer anderen Zeile k
- (2) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\neq 0$
- (3) Vertauschen zweier Zeilen

Um die Umformung wieder umzukehren, muss man offenbar bei (1) dasselbe Vielfache von Zeile i wieder von Zeile k subtrahieren, und bei (2) durch die gleiche Zahl dividieren. (Deswegen ist die Zahl $\neq 0$!)

Achtung!

Oft fasst man mehrere Schritte vom Typ (1) zusammen: man addiert Vielfache von einer Zeile zu mehreren anderen Zeilen. Dabei ist wichtig, dass die Ausgangszeile, von der Vielfache zu anderen Zeilen addiert werden, während des Schrittes nicht verändert wird. Ansonst ist die Umformung nicht mehr umkehrbar und die Lösung wird verändert! Also:

Addiert man Vielfache einer Zeile zu anderen Zeilen, darf dabei die Ausgangszeile in diesem Schritt *nicht* verändert werden.

Wir können jetzt den Gaußalgorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme für einen einfachen Fall beschreiben. Dies ist der *quadratische* Fall $m = n$, d.h. das Gleichungssystem hat genauso viele Gleichungen wie Unbekannte.

Gaußalgorithmus, quadratischer Fall.

1. Umformung von $(A|b)$ auf *obere Dreiecksform*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{nn} & \tilde{b}_n \end{array} \right) \quad (6.3)$$

Unterhalb der Diagonalen dürfen also nur noch Nullen stehen. Das Schlangensymbol bei \tilde{a}_{ij} und \tilde{b}_j deutet an, dass sich diese Zahlen gegenüber der Ausgangsmatrix $(A|b)$ im Allgemeinen geändert haben werden.

2. Lösung durch *Rückwärtseinsetzen*:

$$\begin{aligned} n. \text{ Zeile: } \quad \tilde{a}_{nn}x_n &= \tilde{b}_n \quad \Rightarrow \quad x_n = \frac{\tilde{b}_n}{\tilde{a}_{nn}} \\ n-1. \text{ Zeile: } \quad \tilde{a}_{n-1,n-1}x_{n-1} + \tilde{a}_{n-1,n}x_n &= \tilde{b}_{n-1} \\ &\Rightarrow \quad x_{n-1} = \frac{\tilde{b}_{n-1} - \tilde{a}_{n-1,n}x_n}{\tilde{a}_{n-1,n-1}} \end{aligned}$$

u.s.w.

Erläuterung: Bei der Umformung auf obere Dreiecksform geht man so vor, dass man im ersten Schritt alle Nullen in der ersten Spalte unterhalb von \tilde{a}_{11} erzeugt. Dazu addiert (oder subtrahiert) man geeignete Vielfache der ersten Zeile von der zweiten, dritten, \dots , bis zur letzten Zeile.

Im nächsten Schritt geht man zur zweiten Spalte und erzeugt dort genauso die Nullen unter \tilde{a}_{22} , d.h. Vielfache der zweiten Zeile werden zur dritten bis letzten Zeile addiert. Man beachte, dass die erste Zeile hier nicht mehr benutzt werden darf. Denn würde man jetzt noch ein Vielfaches der ersten Zeile zu einer der unteren addieren, so würde das ja die Nullen in der ersten Spalte wieder zerstören!

Als nächstes erzeugt man die Nullen in der dritten Spalte durch Additionen von Vielfachen der dritten Zeile, u.s.w. bis die Dreiecksform komplett ist.

Beim Rückwärtseinsetzen ist die Idee, mit der letzten Zeile zu beginnen, also

$$(0 \quad \dots \quad 0 \quad \tilde{a}_{nn} \mid \tilde{b}_n).$$

Die Zeile entspricht der Gleichung¹

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_{n-1} + \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n.$$

Da die Gleichung nur noch die eine Unbekannte x_n enthält, kann man jetzt danach auflösen. Nun geht man zur vorletzten Zeile. Die entsprechende Gleichung ist

$$\tilde{a}_{n-1,n-1}x_{n-1} + \tilde{a}_{n-1,n}x_n = \tilde{b}_{n-1}$$

und enthält die zwei Unbekannten x_{n-1} und x_n . Aber x_n haben wir ja schon ausgerechnet, können also das Ergebnis hier einsetzen und damit dann x_{n-1} ausrechnen. So werden nacheinander (rückwärts) alle Variablen $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1$ berechnet.

Beispiel 6.2.1 Wir wollen die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2 \\ -x_1 - x_2 &= 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 7 \end{aligned}$$

¹Hier geht man also von der Koeffizientenmatrix wieder zurück zu den Gleichungen, indem man die Variablen x_j wieder einfügt.

mit dem Gaußalgorithmus berechnen. Zur Erklärung schreiben wir hier auf der linken Seite das volle Gleichungssystem, auf der rechten Seite die zugehörige Koeffizientenmatrix. Später werden wir nur noch die Schreibweise mit der Koeffizientenmatrix benutzen.

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 = 4 \quad +\text{I} \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 7 \quad -3\text{I} \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & -4 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ +\text{I} \\ -3\text{I} \end{array} \\
 \Leftrightarrow & \left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ -2x_2 - 2x_3 = 6 \quad \cdot (-\frac{1}{2}) \\ x_2 + 2x_3 = 1 \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \cdot (-\frac{1}{2}) \\
 \Leftrightarrow & \left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \quad -\text{II} \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) -\text{II} \\
 \Leftrightarrow & \left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ x_3 = 4 \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Wir haben somit das die obere Dreiecksform erreicht. Jetzt können wir die Lösung durch Rückwärtseinsetzen berechnen:

$$\begin{aligned}
 3. \text{ Zeile:} & \quad x_3 = 4 \\
 2. \text{ Zeile:} & \quad x_2 + x_3 = -3 \Rightarrow x_2 = -3 - x_3 = -3 - 4 = -7 \\
 1. \text{ Zeile:} & \quad x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 + x_2 + 2x_3 = 2 - 7 + 8 = 3
 \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist somit

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -7, \quad x_3 = 4.$$

Das können wir alternativ auch als Lösungsvektor aufschreiben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

6.3 Der allgemeine Gaußalgorithmus

Der im letzten Abschnitt präsentierte Algorithmus muss nicht immer funktionieren. Es kann nämlich passieren, dass auf der Diagonalen an einer Stelle eine Null entsteht. Für solche Fälle muss der Algorithmus abgewandelt werden.

Auch sind nicht alle linearen Gleichungssysteme quadratisch. Es kommt auch in Anwendungen durchaus vor, dass ein Gleichungssystem mehr Gleichungen als Variablen hat, oder mehr Variablen als Gleichungen. Auch dafür muss der Algorithmus verallgemeinert werden.

Das führt zum folgenden *allgemeinen Gaußalgorithmus* zur Lösung eines $m \times n$ Gleichungssystems $(A|b)$:

Gaußalgorithmus allgemein.I. Zeilenumformungen von $(A|b)$ auf *Zeilen-Stufenform*:

$$(\tilde{A}|\tilde{b}) = \left(\begin{array}{cccccccc|c} \tilde{a}_{11} * \dots * & \dots * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \tilde{b}_1 \\ 0 & 0 \dots \tilde{a}_{2j_2} * \dots * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \tilde{b}_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \dots \tilde{a}_{3j_3} & \dots & \dots & \dots & \dots & \tilde{b}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \tilde{a}_{rj_r} * \dots * & \dots & \dots & \tilde{b}_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \tilde{b}_m \end{array} \right) \quad (6.4)$$

Hierbei sind alle Zahlen $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{2j_2}, \dots, \tilde{a}_{rj_r} \neq 0$, und an den Stellen $*$ stehen beliebige Zahlen.

In der Zeilen-Stufenform sind also die oberen r Zeilen ungleich Null, die unteren $m - r$ Zeilen sind (links im Matrixteil) komplett Null. $r = m$ ist auch möglich, dann gibt es links keine Nullzeilen. Die Zahl r heißt *Rang* des Gleichungssystems.

In jeder der Zeilen $1, \dots, r$ steht die erste Zahl ungleich Null \tilde{a}_{ij_i} *mindestens* eine Stelle weiter rechts als in der vorherigen Zeile, d.h.

$$1 < j_2 < j_3 < \dots < j_r.$$

Es kann z.B. $j_2 = 2$ sein ($\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{2j_2}$ auf der Diagonale) oder $j_2 \geq 3$ (längere „Stufe“ von \tilde{a}_{11} zu \tilde{a}_{2j_2}).

Die Umformung auf *Zeilen-Stufenform* geschieht in folgenden Schritten (sogenannte Vorwärtselimination²):

- (1) (a) Falls $a_{11} = 0$: Tausche Zeilen, sodass $\tilde{a}_{11} \neq 0$.
 (b) Addiere Vielfaches von Zeile 1 zu den Zeilen $2, \dots, m$, sodass unter \tilde{a}_{11} Nullen entstehen, das heißt $\tilde{a}_{21} = \dots = \tilde{a}_{m1} = 0$.
- (2) (a) Gehe zu nächster Spalte j_2 , in der eine der Zahlen ab Zeile 2 (also $\tilde{a}_{2j_2}, \dots, \tilde{a}_{mj_2}$) ungleich Null ist. (Immer $j_2 \geq 2$)
 (b) Tausche Zeilen, sodass diese Zahl in Zeile 2 steht (d.h. $\tilde{a}_{2j_2} \neq 0$).
 (c) Addiere Vielfaches von Zeile 2 zu den Zeilen $3, \dots, m$, sodass unter \tilde{a}_{2j_2} nur noch Nullen stehen.
- (3) Wiederhole Schritt (2) für Zeile 3, Spalte j_3 , u.s.w. bis zur letzten Zeile oder bis nur noch Nullzeilen übrig sind.

II. Falls $r < m$: Überprüfung der Lösbarkeit.Die Zeilen $r + 1$ bis m der Zeilen-Stufenform ergeben

$$\begin{array}{l} 0x_1 + \dots + 0x_n = \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots \\ 0x_1 + \dots + 0x_n = \tilde{b}_m \end{array}$$

²Dies ist der eigentliche Gaußalgorithmus.

Das Gleichungssystem ist somit genau dann lösbar, wenn $\tilde{b}_{r+1} = \dots = \tilde{b}_m = 0$ (sonst Widerspruch).

Im Fall $r = m$ ist das Gleichungssystem immer lösbar.

III. Lösung durch Rückwärtseinsetzen:

Berechne rückwärts aus den Zeilen r bis 1 jeweils eine neue Variable x_j . Die restlichen, nicht berechneten $n - r$ Variablen sind *freie Parameter* der Lösung.

Für die Theorie der Lösung linearer Gleichungssysteme ergibt sich aus dem Gaußalgorithmus:

Satz 6.3.1 *Jedes lineare Gleichungssystem $(A|b)$ lässt sich durch Zeilenumformung auf Zeilen-Stufenform $(\tilde{A}|\tilde{b})$ bringen.*

Sei r der Rang aus der Zeilen-Stufenform, m, n die Anzahl der Zeilen und Spalten. Das Gleichungssystem ist lösbar genau dann wenn

$$\tilde{b}_{r+1} = \dots = \tilde{b}_m = 0.$$

In diesem Fall hat das Gleichungssystem bei

- $r = n$ eine eindeutige Lösung;
- $r < n$ eine Lösung mit $n - r$ freien Parametern.

Bemerkung: Falls sich aus dem Gaußalgorithmus eine Lösung mit freien Parametern ergibt (wenn also $r < n$), ist die Frage: Welche der Variablen x_j werden ausgerechnet, und welche wählt man als freie Parameter?

Folgendes Verfahren funktioniert immer: Man sucht für jede der nicht-Null-Zeilen in (6.4) die Spalte mit der ersten Zahl $\neq 0$, wo also die nächste Stufe beginnt. Die Variablen in diesen Spalten werden berechnet, die anderen wählt man als freie Parameter. In der Notation von (6.4) heißt das, man berechnet die Variablen zu $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{2j_2}, \dots, \tilde{a}_{rj_r} \neq 0$:

$$x_1, x_{j_2}, x_{j_3}, \dots, x_{j_r}.$$

Allgemeiner kann man in der i . Zeile eine Variable x_j dann zur Berechnung wählen, wenn $\tilde{a}_{ij} \neq 0$ ist. Dies muss natürlich so geschehen, dass am Ende wieder r Variablen zur Berechnung gewählt sind.

Beispiel 6.3.2 (a) Gesucht ist die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 6x_1 + 9x_2 - x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Wir stellen die entsprechende Koeffizientenmatrix auf und formen auf Zeilen-Stufenform um:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 & 6 \\ 6 & 9 & -1 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} +I \\ -3I \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array} \right) -2II \\ \Leftrightarrow &\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Hier entstehen schon beim Erzeugen der Nullen der ersten Spalte auch Nullen in der zweiten Spalte. In der zweiten Zeile finden wir also die erste Zahl ungleich Null erst in der dritten Spalte ($\Rightarrow j_2 = 3$ im Schritt (2) des Gaußalgorithmus). Deswegen machen wir dann mit der dritten Spalte weiter und erzeugen unter der 1 eine Null. Dies ist dann die fertige Zeilen-Stufenform, mit einer „langen“ Stufe von der ersten zur zweiten Zeile und einer Nullzeile (dritte Zeile).

Die Zeilen-Stufenform hat zwei Zeilen $\neq 0$, also ist der Rang

$$r = 2.$$

Wegen der Nullzeile unten müssen wir auf Lösbarkeit prüfen: Rechts vom senkrechten Strich in der letzten Zeile steht eine Null, d.h. $\tilde{b}_3 = 0$, somit ist das Gleichungssystem lösbar. Anders gesagt ist die letzte Zeile

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0,$$

also kein Widerspruch.

Aus $r = 2$ folgt, dass wir $n - r = 3 - 2 = 1$ freien Parameter haben. Wir rechnen die Variablen x_1, x_3 zur *ersten* und *dritten* Spalte aus, denn in der ersten Zeile steht die erste Zahl $\neq 0$ in der *ersten* Spalte, und in der zweiten Zeile in der *dritten* Spalte. (Die Stufen „beginnen“ in der ersten und dritten Spalte, siehe auch letzte Bemerkung.) Weil wir x_1, x_3 berechnen, ist x_2 ein freier Parameter:

$$x_2 = t.$$

($t \in \mathbb{R}$ ist der Parameter.) Jetzt berechnen wir x_1 und x_3 durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{aligned} \text{Zeile 2:} \quad & x_3 = 5 \\ \text{Zeile 1:} \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ \Rightarrow & 2x_1 = -3x_2 + x_3 - 1 = -3t + 5 - 1 = -3t + 4 \\ \Rightarrow & x_1 = -\frac{3}{2}t + 2 \end{aligned}$$

Die Lösung als Vektor ist somit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t + 2 \\ t \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- (b) Wir wollen das folgende Gleichungssystem lösen, das hier gleich als erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben ist:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 7 & -1 & -6 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Hier haben wir den Fall, dass die Zahl links oben $a_{11} = 0$ ist. Wir müssen daher als erstes Zeilen tauschen, um oben links eine Zahl $\neq 0$ zu bekommen. Wir wählen dafür die dritte Zeile, weil diese mit einer 1 beginnt. Dies

erspart uns Brüche in den folgende Schritten.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 7 & -1 & -6 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & -6 \end{array} \right) -2\text{I} \\ \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & -6 \end{array} \right) +2\text{II} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dies ist wieder die Zeilen-Stufenform. Wir haben

$$\begin{aligned} \text{Rang } r &= 3, & (r = 3 = m \Rightarrow \text{Gleichungssystem lösbar}) \\ n - r &= 4 - 3 = 1 \text{ freier Parameter} \end{aligned}$$

Die Stufen beginnen hier in den Spalten 1, 2 und 3, wir berechnen daher x_1, x_2, x_3 und damit ist

$$x_4 = t \quad \text{freier Parameter.}$$

Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{aligned} \text{Zeile 3:} & \quad x_3 - x_4 = 2 \Rightarrow x_3 = 2 + x_4 = 2 + t \\ \text{Zeile 2:} & \quad x_2 - 3x_3 = 4 \Rightarrow x_2 = 4 + 3x_3 = 4 + 3(2 + t) = 10 + 3t \\ \text{Zeile 1:} & \quad x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & \Rightarrow x_1 = 2 - x_2 - x_4 = 2 - (10 + 3t) - t = -8 - 4t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 - 4t \\ 10 + 3t \\ 2 + t \\ t \end{pmatrix}$$

6.4 Komplexe lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme können auch *komplex* sein, d.h. komplexe Koeffizienten haben: $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $b_j \in \mathbb{C}$. Den Gaußalgorithmus kann man auch in diesem Fall genauso benutzen. Er liefert dann entsprechend komplexe Lösungen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$.

Kapitel 7

Vektorrechnung im Anschauungsraum

Vektoren sind mathematische Größen die, anders als Zahlen, eine Richtung und eine Länge haben. Anschaulich kann man sich Vektoren damit als geometrische Objekte im uns umgebenden dreidimensionalen Raum oder in der Ebene vorstellen. Andererseits werden Vektoren durch Komponenten in Bezug auf Koordinatensysteme dargestellt. Wir werden sehen, wie sich daraus geometrische Eigenschaften wie Länge oder der Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen lassen.

Hinweis: In den alten Mathematik A&B Skripten finden sie den Stoff dieses Kapitels im Skript Mathematik A, Kapitel 4.

7.1 Vektoren im \mathbb{R}^n und Koordinatensysteme

Wir betrachten Vektoren zunächst als abstraktes Objekt, als Vektor aus n Komponenten:

Definition 7.1.1 Man nennt

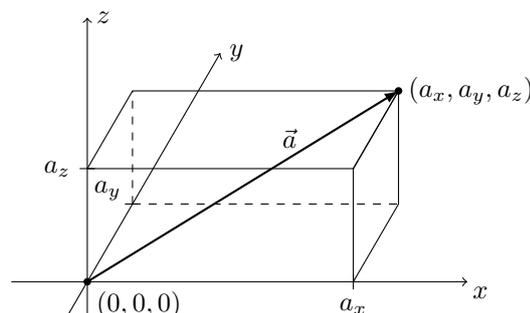
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

einen *Vektor* mit den *Komponenten* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Die Menge aller Vektoren mit n Komponenten schreibt man als

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zum Beispiel sind

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Abbildung 7.1: Darstellung von Vektoren im \mathbb{R}^3

zwei Vektoren, der erste in \mathbb{R}^3 (weil er drei Komponenten hat), der zweite in \mathbb{R}^4 (vier Komponenten).

Die Bedeutung der Komponenten und die anschauliche Vorstellung als Vektor mit Richtung und Länge wird durch ein *Koordinatensystem* hergestellt. Wir betrachten zuerst Koordinatensysteme und Vektoren im dreidimensionalen Raum.

Ein Koordinatensystem im Raum wird festgelegt durch:

- drei Achsen x, y, z , die zueinander senkrecht stehen;
- die relative Orientierung der Achsen zueinander, festgelegt durch die *Rechte-Hand-Regel*: Dabei zeigt die ...
 - x -Achse in Richtung Daumen,
 - y -Achse in Richtung Zeigefinger,
 - z -Achse in Richtung Mittelfinger

der rechten Hand.

So geht etwa in Abbildung 7.1 die x -Achse nach rechts, die y -Achse nach „hinten“ (d.h. in die Ebene der Zeichnung hinein), und die z -Achse nach oben. Das passt mit der Rechte-Hand-Regel zusammen: zeigt der ausgestreckte Daumen der rechten Hand nach rechts und der Zeigefinger nach hinten, so zeigt der ausgestreckte Mittelfinger nach oben (und nicht nach unten).¹

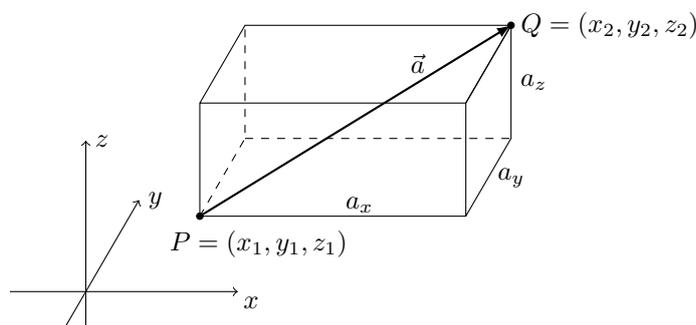
Man stellt nun einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, also einen Vektor mit drei Komponenten

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

wie folgt im Koordinatensystem dar: Der Vektor wird als Pfeil vom Ursprung $O = (0, 0, 0)$ zum Punkt (a_x, a_y, a_z) abgetragen, siehe Abbildung 7.1.

Die Punkte $(0, 0, 0)$ und (a_x, a_y, a_z) bilden dabei gegenüberliegende Eckpunkte eines Quaders mit der Breite a_x in x -Richtung, der Tiefe a_y in y -Richtung

¹Die Orientierung der Achsen ist aber nur *relativ* zueinander festgelegt: Z.B. könnte auch die x -Achse nach rechts, die y -Achse nach oben, und dann die z -Achse nach vorne zeigen. Auch das passt mit der Rechte-Hand-Regel zusammen.

Abbildung 7.2: Vektor \vec{a} im Anfangspunkt $P = (x_1, y_1, z_1)$

und der Höhe a_z in z -Richtung. Der Vektor \vec{a} läuft diagonal durch den Quader. Die Komponenten a_x, a_y, a_z bestimmen Größe und Position des Quaders und damit die Länge und die Richtung des Vektors.

Man beachte hier, dass die Komponenten a_x, a_y, a_z auch negativ oder Null sein können: Ist z.B. $a_x < 0$, so liegt der Quader auf der Seite der negativen x -Achse, also links vom Ursprung O . Ist $a_x = 0$ so wird aus dem Quader ein Rechteck in der yz -Ebene und der Vektor \vec{a} liegt entsprechend auch in der yz -Ebene.

Wir haben eben den Vektor \vec{a} ausgehend vom Ursprung $O = (0, 0, 0)$ gezeichnet. Der Vektor kann aber zu jedem beliebigen anderen Anfangspunkt $P = (x_1, y_1, z_1)$ verschoben werden, siehe Abbildung 7.2. Da es derselbe Vektor \vec{a} mit denselben Komponenten a_x, a_y, a_z ist, ist auch der Quader dergleiche, nur verschoben. Entsprechend sind natürlich Länge und Richtung des Vektors unverändert. Durch Verschiebung haben wir aber einen neuen Endpunkt Q . Der Vektor \vec{a} „zeigt“ also nun von P nach Q , wofür man auch

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} \quad (7.1)$$

schreibt. Hat Q die Koordinaten $Q = (x_2, y_2, z_2)$, so erhalten wir für die Komponenten des Vektors:

$$\begin{aligned} a_x &= x_2 - x_1 \\ a_y &= y_2 - y_1 \\ a_z &= z_2 - z_1 \end{aligned}$$

Denn z.B. ist die x -Koordinate der linken Seite des Quaders x_1 , die der rechten Seite x_2 , und damit ist die Breite des Quaders $a_x = x_2 - x_1$. Diese Gleichungen können wir als Formel zur Berechnung des Vektors \overrightarrow{PQ} aus Anfangspunkt P und Endpunkt Q schreiben:

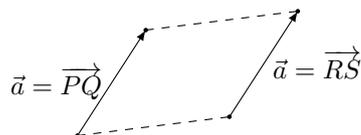
$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Diese Formel kann man sich kurz als „Endpunkt minus Anfangspunkt“ merken: Koordinaten von $Q = (x_2, y_2, z_2)$ minus Koordinaten von $P = (x_1, y_1, z_1)$.

Wir haben gesehen, dass ein Vektor \vec{a} vollständig bestimmt ist durch

1. seine Komponenten a_x, a_y, a_z , oder
2. seine Länge und Richtung.

Geht z.B. \overrightarrow{PQ} durch Parallelverschiebung in den Vektor \overrightarrow{RS} über, dann gilt $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$:



Die Vektoren \overrightarrow{PQ} und \overrightarrow{RS} haben gleiche Länge und Richtung, sind also gleich.

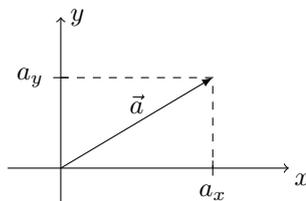
Beispiel 7.1.2 Gegeben sind die beiden Punkte $P = (1, 4, 3)$, $Q = (2, 2, 7)$, gesuchte ist der Vektor von P nach Q , d.h. $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$. Aus der Formel (7.2) (Endpunkt minus Anfangspunkt) erhalten wir

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 2 - 4 \\ 7 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Für *Vektoren in der Ebene* gelten die gleichen Prinzipien wie für Vektoren im Raum, jeweils mit nur zwei Komponenten bzw. Dimensionen. So wird ein Vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

im zweidimensionalen Koordinatensystem dargestellt durch



7.2 Addition von Vektoren

Für Vektoren gibt es verschiedene Rechenoperationen. Zum Teil sind das von den reellen Zahlen bekannte Operationen mit gleichen oder ähnlichen Rechenregeln, zum Teil sind es aber völlig neue Operationen, die es bei Zahlen nicht gibt. An der Stelle muss man dann aufpassen, da man *nicht mehr so rechnen kann, wie mit reellen Zahlen!*

Die einfachste Operation für Vektoren ist die Addition. Für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, also Vektoren mit n Komponenten

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

definiert man die Summe durch

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Vektoren werden also *komponentenweise* addiert.

Die Addition von Vektoren verhält sich genauso wie die Addition von reellen Zahlen. Zunächst gibt es einen Vektor, der bei Addition zu einem anderen Vektor diesen nicht ändert. Das ist der *Nullvektor*

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad (7.4)$$

für den gilt

$$\vec{a} + \vec{0} = \begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ \vdots \\ a_n + 0 \end{pmatrix} = \vec{a}. \quad (7.5)$$

Mathematisch sagt man, dass $\vec{0}$ das *neutrale Element* bezüglich der Addition von Vektoren ist, d.h. eben der Vektor, der der Null im Bereich der Zahlen entspricht.

Weiter gibt es zu jedem Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ den *negativen Vektor* $-\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, der bei Addition zu \vec{a} den Nullvektor $\vec{0}$ ergibt.² Zu

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad -\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

der negative Vektor, denn es gilt

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_1 + (-a_1) \\ \vdots \\ a_n + (-a_n) \end{pmatrix} = \vec{0}. \quad (7.7)$$

Mathematisch nennt man $-\vec{a}$ das *inverse Element* bezüglich der Addition – es macht die Addition von \vec{a} wieder rückgängig.

Hat man eine Addition und das inverse Element dazu, so kann man daraus dann die *Subtraktion* als Addition mit dem inversen Element definieren. Für Vektoren heißt das einfach

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Das ist genau die Formel, die man nach (7.3) auch erwartet hätte: Vektoren werden komponentenweise subtrahiert.

²Man beachte, dass die Schreibweise $-\vec{a}$ hier *nicht* die Multiplikation von \vec{a} mit der Zahl -1 bedeutet. Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl ist noch gar nicht definiert, und die Existenz und Bedeutung des negativen Vektors ist auch unabhängig davon.

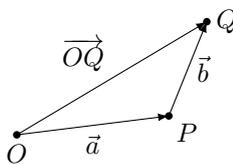


Abbildung 7.3: Addition von Vektoren geometrisch

Wir erklären jetzt die geometrische Bedeutung von Addition, negativem Vektor und Subtraktion. Es seien zwei Vektoren im Raum gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}.$$

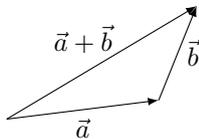
Wir wollen den Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$ geometrisch veranschaulichen. Dazu legen wir \vec{a} in den Anfangspunkt $O = (0, 0, 0)$, den Ursprung. \vec{a} zeigt dann von O zum Endpunkt P , d.h. $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ und der Endpunkt hat damit die Koordinaten $P = (a_x, a_y, a_z)$. (Das ist genau die Darstellung aus Abbildung 7.1 für \vec{a} .) Den Vektor \vec{b} legen wir jetzt so, dass sein Anfangspunkt P ist, also genau der Endpunkt von \vec{a} . Der entsprechende Endpunkt von \vec{b} sei $Q = (x, y, z)$, d.h. $\vec{b} = \overrightarrow{PQ}$. Dies ist in Abbildung 7.3 dargestellt. Wir erhalten dann für die Komponenten von \vec{b} die Beziehung

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x - a_x \\ y - a_y \\ z - a_z \end{pmatrix}.$$

(Die letzte Gleichheit ist „Endpunkt Q minus Anfangspunkt P “.) Wir können nun jede Komponente nach den Variablen x , y bzw. z auflösen und erhalten damit

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} = \vec{a} + \vec{b}.$$

denn $Q = (x, y, z)$. Damit haben wir den Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$ in Abbildung 7.3 identifiziert: es ist $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OQ}$. Grafisch bedeutet das Ergebnis:

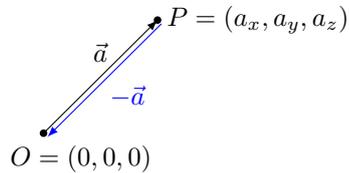


Das heißt, die Addition $\vec{a} + \vec{b}$ entspricht grafisch dem Hintereinanderhängen von \vec{a} und \vec{b} .

Jetzt betrachten wir den negativen Vektor. Legen wir \vec{a} wie eben in den Ursprung O , so gilt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} \quad \Rightarrow \quad -\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - a_x \\ 0 - a_y \\ 0 - a_z \end{pmatrix} = \overrightarrow{PO}.$$

(am Schluss Endpunkt O minus Anfangspunkt P !) Der Vektor $-\vec{a}$ zeigt also von P wieder zurück zu O ,

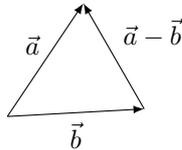


das heißt, $-\vec{a}$ hat dieselbe Länge wie \vec{a} , aber die umgekehrte Richtung.

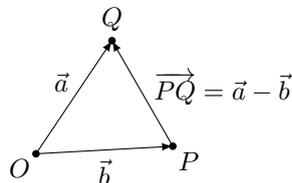
Die geometrische Bedeutung der Subtraktion schließlich folgt aus der Bedeutung der Addition. Wenn wir die Gleichung

$$\vec{b} + (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}$$

grafisch interpretieren, bedeutet sie, dass der Vektor $\vec{a} - \vec{b}$ hinter den Vektor \vec{b} angehängt den Vektor \vec{a} ergibt:



Das heißt: legt man \vec{a} und \vec{b} in denselben Anfangspunkt, dann zeigt der Differenzvektor $\vec{a} - \vec{b}$ vom Endpunkt von \vec{b} zum Endpunkt von \vec{a} . Dies entspricht wieder dem Prinzip „Endpunkt minus Anfangspunkt“, denn \vec{a} zeigt auf den Endpunkt von $\vec{a} - \vec{b}$, und \vec{b} auf den Anfangspunkt:



7.3 Multiplikation mit Skalar

Die nächste Operation für Vektoren ist die Multiplikation mit einer Zahl. Für einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ und eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ ist das Produkt $r\vec{a}$ definiert durch

$$r\vec{a} = r \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ \vdots \\ ra_n \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Die Zahl r nennt man hier auch *Skalar*. Man kann also einen Vektor mit einem Skalar multiplizieren, wobei jede einzelne Komponente des Vektors mit dem Skalar multipliziert wird.

Aus der Definition (7.9) ergeben sich sofort folgende einfache Formeln:

$$\begin{aligned} 0\vec{a} &= \vec{0}, & r\vec{0} &= \vec{0}, \\ 1\vec{a} &= \vec{a}, & (-1)\vec{a} &= -\vec{a}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

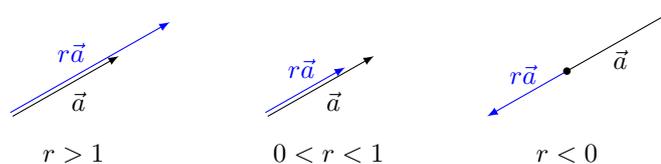


Abbildung 7.4: Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Man beachte hier den Unterschied zwischen dem Skalar (Zahl) 0 und dem Vektor $\vec{0}$. Die letzte Gleichung besagt, dass man (natürlich) den negativen Vektor $-\vec{a}$ (also das Inverse der Addition, siehe letzter Abschnitt) durch Multiplikation von \vec{a} mit -1 erhält.

Beachte: Bei der Multiplikation von Skalar mit Vektor steht der Skalar immer links vom Vektor. Dies ist eine mathematische Konvention, die den Unterschied zwischen den beiden Objekten Skalar und Vektor beim Produkt nochmal deutlich macht.

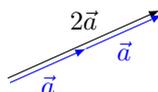
Die *geometrische* Bedeutung der Multiplikation mit einem Skalar ist in Abbildung 7.4 dargestellt.

- Fall $r > 1$: Die Multiplikation bewirkt eine Streckung (Verlängerung) des Vektors. Die Richtung bleibt gleich.
- Fall $0 < r < 1$: Der Vektor wird gestaucht (verkürzt). Die Richtung bleibt gleich.
- Fall $r < 0$: Die Multiplikation mit einer negativen Zahl bewirkt eine Umkehrung der Richtung. Zugleich erfolgt eine Streckung (bei $|r| > 1$) oder Stauchung (bei $|r| < 1$).

Dass die Multiplikation mit $r < 0$ eine Richtungsumkehr bewirkt, sieht man an der Formel $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ von oben. Streckung und Stauchung im Fall $r > 0$ begründen wir an zwei einfachen Fällen: Offenbar gilt

$$2\vec{a} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ \vdots \\ 2a_n \end{pmatrix} = \vec{a} + \vec{a}.$$

Geometrisch bedeutet das, dass $2\vec{a}$ durch Hintereinanderhängen von zwei Kopien von \vec{a} entsteht:



Damit ist $2\vec{a}$ also auf die doppelte Länge von \vec{a} gestreckt. Als Beispiel für die Stauchung betrachten wir

$$\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a}.$$

Diese Gleichung bedeutet geometrisch

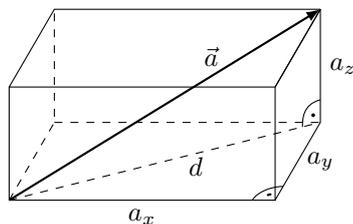
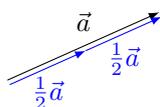


Abbildung 7.5: Zur Formel für die Länge (den Betrag) eines Vektors



$\frac{1}{2}\vec{a}$ ist also halb so lang wie \vec{a} .

Natürlich kann man die gleiche Argumentation in den Fällen $3\vec{a}$, $4\vec{a}$, ... sowie $\frac{1}{3}\vec{a}$, $\frac{1}{4}\vec{a}$, ... verwenden. Im Abschnitt 7.4 über den Betrag eines Vektors werden wir dann sehen, dass allgemein für jedes $r \in \mathbb{R}$ der Vektor $r\vec{a}$ die r -fache Länge von \vec{a} hat, bzw. die $|r|$ -fache Länge bei $r < 0$.

Wir notieren jetzt noch einige (weitere) *Rechenregeln*, die bei der Addition von Vektoren und der Multiplikation mit Skalaren gelten. Hierbei sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und $r, s \in \mathbb{R}$ Skalare:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \text{Assoziativität der Addition} \quad (7.11)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{Kommutativität} \quad (7.12)$$

$$r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a} \quad \text{Assoziativität der Multiplikation} \quad (7.13)$$

$$(r + s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a} \quad \text{Distributivgesetze} \quad (7.14)$$

$$r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b} \quad (7.15)$$

7.4 Der Betrag eines Vektors

Definition 7.4.1 Man nennt die Länge eines Vektors $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ seinen *Betrag*, geschrieben als $|\vec{a}|$.

Um eine Formel für den Betrag (also die Länge) herzuleiten, betrachten wir zuerst einen Vektor im Raum

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

Mit seinen Komponenten a_x, a_y, a_z können wir zwei rechtwinklige Dreiecke betrachten, siehe Abbildung 7.5. Das erste Dreieck wird gebildet von den Seiten a_x und a_y als Katheten und der Diagonale d als Hypotenuse, das zweite Dreieck von d , a_z als Katheten und \vec{a} als Hypotenuse. Wir können nun den Satz von Pythagoras zweimal anwenden, wobei die Länge der Hypotenuse \vec{a} genau der

gesuchte Betrag $|\vec{a}|$ ist:

$$d^2 = a_x^2 + a_y^2, \quad |\vec{a}|^2 = d^2 + a_z^2.$$

Setzen wir den Wert für d^2 von der ersten Gleichung in die zweite ein, erhalten wir

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$

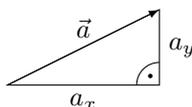
und damit ist die Länge (der Betrag) des Vektors $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ gleich

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (7.16)$$

Bei einem zweidimensionalen Vektor in der Ebene

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

haben wir einfach das rechtwinklige Dreieck



Nach Pythagoras ist dann

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2$$

und somit

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (7.17)$$

Analog zum zwei- und dreidimensionalen Fall definiert man dann *allgemein* für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

den Betrag als

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}. \quad (7.18)$$

Manchmal benutzt man auch eine andere Schreibweise für den Betrag:

$$\|\vec{a}\|$$

Man spricht dann von der „Norm“ oder genauer der „euklidischen Norm“ von \vec{a} .

Beispiel 7.4.2 Der Vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hat die Länge

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}.$$

(Achtung bei negativen Komponenten: Minusklammer!)

Für den Betrag von Vektoren gelten folgende Regeln:

Satz 7.4.3 Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$. Es gilt:

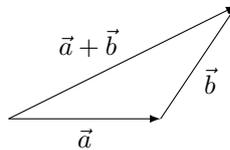
$$(a) |\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

$$(b) |r\vec{a}| = |r||\vec{a}|$$

$$(c) |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Bemerkung: (b) sagt aus, dass der Vektor $r\vec{a}$ genau $|r|$ -mal so lang ist wie \vec{a} .

(c) ist die schon von den komplexen Zahlen bekannte *Dreiecksungleichung*: Aus dem Abschnitt 7.2 kennen wir das Dreieck für die Addition von Vektoren



Die Dreiecksungleichung sagt damit aus, dass die Länge (also der Betrag) von $\vec{a} + \vec{b}$ kleiner oder gleich der Summe der Längen der anderen beiden Dreiecksseiten \vec{a} und \vec{b} ist.

Beweis Satz 7.4.3. (a) folgt sofort aus (7.18), denn

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 = 0$$

kann nur dann gelten, wenn $a_1 = \dots = a_n = 0$ gilt. Auch (b) kann man direkt aus (7.18) nachrechnen:

$$|r\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} ra_1 \\ \vdots \\ ra_n \end{pmatrix} \right| = \sqrt{r^2 a_1^2 + \dots + r^2 a_n^2} = \sqrt{r^2} \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} = |r| |\vec{a}|.$$

Die Dreiecksungleichung (c) ist geometrisch klar. □

7.5 Einheitsvektoren

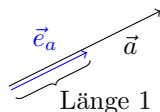
Definition 7.5.1 Ein Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ mit der Länge $|\vec{a}| = 1$ heißt *Einheitsvektor*.

Zu jedem Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ gibt es einen Einheitsvektor, der in Richtung von \vec{a} zeigt, nämlich

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}. \quad (7.19)$$

Tatsächlich ist \vec{e}_a ein Einheitsvektor, denn

$$|\vec{e}_a| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1.$$

Abbildung 7.6: Der Einheitsvektor \vec{e}_a zu einem Vektor \vec{a}

Und da man \vec{e}_a durch Multiplikation von \vec{a} mit dem positiven Skalar $\frac{1}{|\vec{a}|}$ erhält, zeigt er auch in dieselbe Richtung wie \vec{a} .

Es gibt noch die sogenannten *Standard-Einheitsvektoren*. Im dreidimensionalen Raum sind das die Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (7.20)$$

Die Vektoren zeigen also genau in die Richtungen der drei Koordinatenachsen x , y und z . Man sagt deswegen auch *kartesische Einheitsvektoren*.

Im \mathbb{R}^n sind die Standard-Einheitsvektoren entsprechend

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \quad (7.21)$$

Beispiel 7.5.2 Gegeben sei der Vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist der Betrag $|\vec{a}|$ und der Einheitsvektor \vec{e}_a zu \vec{a} .

Offenbar sind alle Komponenten des Vektors Vielfache von 4. Das können wir bei der Berechnung des Betrags benutzen, um das Rechnen mit großen Zahlen zu vermeiden. Dazu ziehen wir den gemeinsamen Faktor 4 im ersten Schritt als Skalar aus dem Vektor heraus und benutzen die Regel (b) von Satz 7.4.3:

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| 4 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 4 \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 4 \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 4\sqrt{6}.$$

Der Einheitsvektor zu \vec{a} ist damit

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{4\sqrt{6}} \cdot 4 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.6 Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist ein Produkt von zwei Vektoren, bei dem das Ergebnis eine Zahl, also eine Skalar ist. (Daher der Name!)

Definition 7.6.1 Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist das *Skalarprodukt* definiert durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n. \quad (7.22)$$

Beachte: Anders als bei der Summe von zwei Vektoren, wo komponentenweise addiert wird und das Ergebnis wieder ein Vektor ist, werden beim Skalarprodukt zwar die entsprechenden Komponenten miteinander multipliziert, dann aber alles addiert, so dass das Ergebnis am Ende eine Zahl ist, und kein Vektor!

Das Skalarprodukt hat folgende Eigenschaften:

Satz 7.6.2 Für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \\ (r\vec{a}) \cdot \vec{b} &= r(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (r\vec{b}) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

Skalarprodukt und Betrag hängen so zusammen:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad \text{d.h.} \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \quad (7.23)$$

Beweis. Die Rechenregeln kann man direkt mit der Definition (7.22) nachprüfen. Wir machen das als Beispiel für die letzte Formel mit dem Betrag:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1^2 + \dots + a_n^2 = |\vec{a}|^2.$$

□

Mit dem Skalarprodukt ist es möglich, den Winkel zwischen zwei Vektoren zu bestimmen. Am einfachsten ist die Situation bei einem rechten Winkel:

Definition 7.6.3 (Orthogonalität) Der Vektor \vec{a} ist *orthogonal* zum Vektor \vec{b} , wenn \vec{a} senkrecht zu \vec{b} steht:



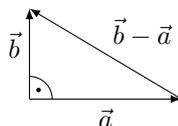
Schreibweise: $\vec{a} \perp \vec{b}$

Ob zwei Vektoren orthogonal zueinander sind, kann man einfach mit dem Skalarprodukt nachprüfen:

Satz 7.6.4 Es gilt

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \iff \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Beweis. Nach dem Satz von Pythagoras für das Dreieck



gilt

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2. \quad (7.24)$$

Dies ist tatsächlich eine Äquivalenz (also „genau dann wenn“): Denn wenn der Winkel zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, ist die Seite $\vec{b} - \vec{a}$ kürzer, und bei einem Winkel größer als $\frac{\pi}{2}$ länger als für einen rechten Winkel. Die Gleichung rechts in (7.24) gilt also wirklich nur genau dann, wenn $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Wir rechnen nun $|\vec{b} - \vec{a}|^2$ aus und benutzen dafür die Regeln von Satz 7.6.2:

$$\begin{aligned} |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{a} \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned} \quad (7.25)$$

Somit folgt

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

und zusammen mit (7.24) heißt das $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. \square

Beispiel 7.6.5 (a) Wir überprüfen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

auf Orthogonalität. Es gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 8 - 6 - 2 = 0.$$

Also ist \vec{a} orthogonal zu \vec{b} : $\vec{a} \perp \vec{b}$.

(b) Sei

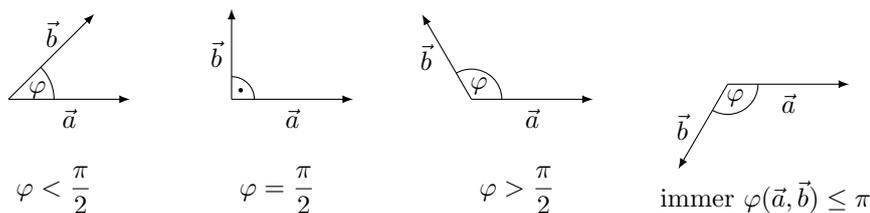
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ein beliebiger Vektor in der Ebene. Dann ist

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

orthogonal zu \vec{a} , denn

$$\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy - xy = 0.$$

Abbildung 7.7: Der Winkel $\varphi = \varphi(\vec{a}, \vec{b})$ zwischen zwei Vektoren

7.7 Winkel zwischen zwei Vektoren

Wir wollen jetzt allgemein den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen. Wir verwenden die Schreibweise

$$\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \text{Winkel zwischen } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \quad (7.27)$$

Es wird dabei immer der Winkel im Intervall $[0, \pi]$ gewählt, d.h. es gilt stets

$$\varphi(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi].$$

Das ist für verschiedene Fälle in Abbildung 7.7 veranschaulicht.

Der Winkel $\varphi(\vec{a}, \vec{b})$ kann man über das Skalarprodukt berechnen:

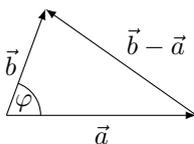
Satz 7.7.1 *Es gilt*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi(\vec{a}, \vec{b}) \quad (7.28)$$

und

$$\cos \varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad \text{für } \vec{a}, \vec{b} \neq 0. \quad (7.29)$$

Beweis. Wir betrachten das Dreieck



Nach dem Cosinussatz gilt dann

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Andererseits haben wir in (7.25) allgemein nachgerechnet, dass

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

gilt. Gleichsetzen liefert damit $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi(\vec{a}, \vec{b})$. \square

Aus der Beziehung (7.28) zwischen Winkel $\varphi(\vec{a}, \vec{b})$ und Skalarprodukt kann man eine einfache Charakterisierung dafür ableiten, wann der Winkel spitz ($\varphi < \frac{\pi}{2}$), rechtwinklig ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) oder stumpf ($\varphi > \frac{\pi}{2}$) ist:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow \cos \varphi(\vec{a}, \vec{b}) > 0 \Leftrightarrow \varphi(\vec{a}, \vec{b}) < \frac{\pi}{2}$ 
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \cos \varphi(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ 
- $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \cos \varphi(\vec{a}, \vec{b}) < 0 \Leftrightarrow \varphi(\vec{a}, \vec{b}) > \frac{\pi}{2}$ 

Beispiel 7.7.2 Gesucht ist der Winkel zwischen den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen zuerst ihr Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 + 0 - 2 = -3.$$

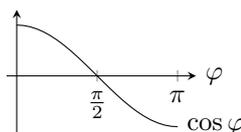
Das $\vec{a} \cdot \vec{b}$ negativ ist, wissen wir schon, dass $\varphi(\vec{a}, \vec{b}) > \frac{\pi}{2}$. Um den Winkel nun genau zu bestimmen, verwenden wir (7.29) und berechnen daher auch die Beträge der Vektoren:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{2}, & |\vec{b}| &= \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \\ \Rightarrow \cos \varphi &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{6}\pi.$$

Bemerkung: Der Wert des Arcussinus ergibt sich hier z.B. wieder aus dem Verlauf der Cosinusfunktion (Punktsymmetrie zu $\varphi = \frac{\pi}{2}$), vergleiche auch Beispiel 5.5.1:



Aus $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ folgt daher

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

7.8 Orthogonale Zerlegung von Vektoren

Bei der *orthogonalen Zerlegung* wird ein Vektor \vec{a} zerlegt in einen Anteil, der parallel zu einer bestimmten, vorgegebenen Richtung ist, und einen senkrechten Anteil. Die Zerlegungsrichtung wird dabei durch einen anderen Vektor \vec{b} festgelegt. Die Zerlegung ist additiv, d.h. der Ausgangsvektor \vec{a} ist die Summe aus dem parallelen Anteil \vec{a}_b und dem senkrechten Anteil \vec{a}_\perp :

$$\vec{a} = \vec{a}_b + \vec{a}_\perp. \quad (7.30)$$

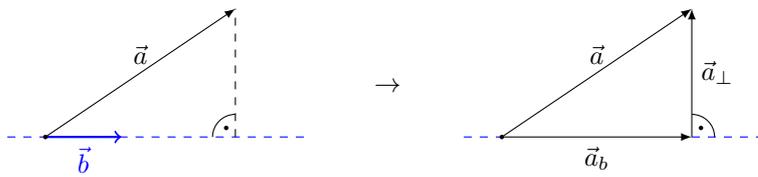
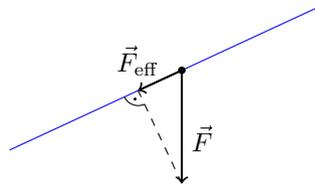


Abbildung 7.8: Orthogonale Zerlegung eines Vektors

Graphisch ergibt sich die Zerlegung aus einem rechtwinkligen Dreieck, siehe Abbildung 7.8. Man nennt den parallelen Anteil \vec{a}_b auch die *orthogonale Projektion* von \vec{a} auf \vec{b} .

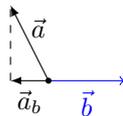
Ein Beispiel für orthogonale Zerlegungen ist die Zerlegung von Kräften in der Physik. Befindet sich zum Beispiel eine Kugel auf einer schiefen Ebene, so zerlegt sich eine Kraft \vec{F} , die auf die Kugel wirkt (etwa die Schwerkraft), in einen Anteil parallel zur Ebene (effektive Kraft \vec{F}_{eff}) und einen senkrechten Anteil:



Wir leiten jetzt Formeln zur *Berechnung* der orthogonalen Zerlegung her: Weil \vec{a}_b parallel zu \vec{b} ist, gilt

$$\vec{a}_b = r\vec{b}$$

mit einem Skalar $r \in \mathbb{R}$ (vergleiche Abschnitt 7.3). Hierbei ist $r < 0$ möglich, nämlich dann wenn der Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} größer als $\frac{\pi}{2}$ ist; \vec{a}_b und \vec{b} zeigen dann in entgegengesetzte Richtungen:



Aus (7.30) folgt dann

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - r\vec{a}_b = \vec{a} - r\vec{b}.$$

Die Bedingung für eine orthogonale Zerlegung ist $\vec{a}_\perp \perp \vec{b}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \vec{a}_\perp \cdot \vec{b} = 0 &\Rightarrow (\vec{a} - r\vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} - r\vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} - r|\vec{b}|^2 = 0 \\ &\Rightarrow r = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \end{aligned}$$

Hier sieht man nochmal, dass $r < 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \varphi(\vec{a}, \vec{b}) > \frac{\pi}{2}$. Einsetzen von r in die Ausdrücke für \vec{a}_b und \vec{a}_\perp liefert dann die *Formeln für die orthogonale Zerlegung*:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_b + \vec{a}_\perp, & \vec{a}_b &\perp \vec{a}_\perp \\ \vec{a}_b &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}, & \vec{a}_\perp &= \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \end{aligned} \quad (7.31)$$

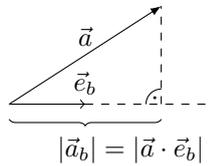
Bemerkung: Die Aufgabe des Vektors \vec{b} ist „nur“, die Richtung für die orthogonale Zerlegung festzulegen. Seine Länge ist dafür unwichtig. Wir können daher für die Richtung immer einen Einheitsvektor \vec{e}_b benutzen:

$$\vec{e}_b = \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b} \quad (\text{Einheitsvektor in Richtung } \vec{b}).$$

Aus (7.31) erhalten wir dann für die orthogonale Projektion \vec{a}_b :

$$\vec{a}_b = (\vec{a} \cdot \vec{e}_b) \vec{e}_b. \quad (7.32)$$

Diese Formel zeigt auch, dass der Betrag von $\vec{a} \cdot \vec{e}_b$ gleich der Länge von \vec{a}_b ist (denn \vec{e}_b hat die Länge 1); und das Vorzeichen von $\vec{a} \cdot \vec{e}_b$ bestimmt, ob \vec{a}_b in Richtung von \vec{e}_b zeigt, oder entgegengesetzt.



Beispiel 7.8.1 Wir berechnen die orthogonale Zerlegung

$$\text{von } \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ in Richtung von } \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zuerst berechnen wir

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -8 + 7 + 3 = 2, \quad |\vec{b}|^2 = 4 + 1 + 1 = 6.$$

Das können wir nun in (7.31) einsetzen:

$$\begin{aligned} \vec{a}_b &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{2}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{a}_\perp &= \vec{a} - \vec{a}_b = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ \frac{20}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die orthogonale Zerlegung von \vec{a} bezüglich \vec{b} ist also

$$\vec{a} = \vec{a}_b + \vec{a}_\perp \quad \text{mit} \quad \vec{a}_b = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a}_\perp = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Als *Probe* können wir überprüfen, dass \vec{a}_b und \vec{a}_\perp wirklich senkrecht zueinander sind:

$$\vec{a}_b \cdot \vec{a}_\perp = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} (-28 + 20 + 8) = 0 \quad \checkmark$$

7.9 Das Vektorprodukt

Neben dem Skalarprodukt gibt es noch ein anderes Produkt zwischen zwei Vektoren, das sogenannte *Vektorprodukt*. Im Gegensatz zum Skalarprodukt ist das Ergebnis hier wieder ein Vektor, was auch den Namen erklärt.

Definition 7.9.1 Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ist das Vektorprodukt von \vec{a} mit \vec{b} definiert als

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \quad (7.33)$$

Beachte, dass in der i . Komponente von $\vec{a} \times \vec{b}$ die Einträge a_i und b_i der Ausgangsvektoren nicht vorkommen, aber alle anderen. Z.B. stehen in der dritten Komponente von $\vec{a} \times \vec{b}$ die Einträge a_1, a_2, b_1, b_2 , aber nicht a_3 und b_3 .

Das folgende Rechenschema verdeutlicht die Bildung des Vektorprodukts:

$$\begin{array}{ccc} \left. \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\} & \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right\} & \\ \left. \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{c} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{array} \right\} \end{array}$$

Man schreibt sich also (oder denkt sich) die ersten zwei Komponenten a_1, a_2 und b_1, b_2 der Vektoren nocheinmal unterhalb der beiden Vektoren hin. Dann berechnet man über Kreuz, entlang der diagonalen Linien, die Produkte der Komponenten und bildet die Differenz. Dabei werden die Produkte zu den gestrichelten Diagonalen, also von links unten nach rechts oben, subtrahiert. Man beginnt in der Rechnung mit dem Kreuz zu a_2, a_3 und b_2, b_3 und erhält daraus die erste Komponente von $\vec{a} \times \vec{b}$. Die weiteren Kreuze jeweils eine Zeile weiter liefern dann genau die zweite und dritte Komponente vom Ergebnis.

Auf Grund dieser Berechnung „über Kreuz“ spricht auch oft vom *Kreuzprodukt* $\vec{a} \times \vec{b}$.

Achtung!

Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist nur für Vektoren aus \mathbb{R}^3 definiert. Entsprechende Formeln für andere Dimensionen, etwa für Vektoren in \mathbb{R}^2 gibt es nicht!

Hier sind einige Rechenregeln für das Vektorprodukt:

Satz 7.9.2 Für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ (r\vec{a}) \times \vec{b} &= r(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (r\vec{b}) \\ \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \quad (\text{Antisymmetrie}) \end{aligned}$$

Die ersten Regeln sind die gewöhnlichen Distributivgesetze und die Vertauschbarkeit mit der Multiplikation mit einem Skalar r ; sie gelten genauso wie beim Skalarprodukt, siehe Satz 7.6.2. Während das Skalarprodukt jedoch symmetrisch bezüglich dem Vertauschen der beiden Vektoren \vec{a}, \vec{b} ist, ist das Vektorprodukt *antisymmetrisch*, d.h. beim Tausch ändert sich das Vorzeichen! Wir rechnen diese Antisymmetrie nach:

Beweis. (Zur Antisymmetrie)

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 a_3 - b_3 a_2 \\ b_3 a_1 - b_1 a_3 \\ b_1 a_2 - b_2 a_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

□

Beispiel 7.9.3 Wir verdeutlichen nochmal die Berechnung des Vektorprodukts an zwei konkreten Beispielen:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 0 - (-1) \cdot 3 \\ (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_3$$

Das zweite Beispiel sagt, dass das Vektorprodukt von \vec{e}_1 (Einheitsvektor in x -Richtung) mit \vec{e}_2 (Einheitsvektor in y -Richtung) genau den Einheitsvektor in z -Richtung \vec{e}_3 ergibt. Das ist kein Zufall, sondern liegt am Zusammenhang des Vektorprodukts mit Orthogonalität und Orientierung, den wir uns jetzt ansehen.

Satz 7.9.4 (Vektorprodukt und Orthogonalität) $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu \vec{a} und zu \vec{b} :

$$\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}, \quad \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}.$$

Beweis. Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt Null ist (siehe Satz 7.6.4). Wir berechnen daher das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \\ &= a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 - a_2 a_3 b_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit folgt $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$. Genauso rechnet man $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ nach. □

7.10 Orientierung und Vektorprodukt

Ähnlich wie bei den Achsen des dreidimensionalen Koordinatensystems kann man auch für drei Vektoren im Raum eine Orientierung der Vektoren zueinander bestimmen:

Definition 7.10.1 Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq 0$ und $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nicht in einer Ebene. Das System $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ der Vektoren heißt *rechtshändig orientiert*, wenn

- \vec{a} in Richtung Daumen
- \vec{b} in Richtung Zeigefinger
- \vec{c} in Richtung Mittelfinger

der rechten Hand zeigt. Statt rechtshändig orientiert sagt man oft auch *positiv orientiert* bzw. dass $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ein *Rechtssystem* bildet.

Das System $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ist *linkshändig* bzw. *negativ* orientiert (bildet ein *Linkssystem*), wenn die Richtungen der Vektoren der linken Hand entsprechen.

Beachte: Für eine positive oder negative Orientierung ist es nicht nötig, dass die Vektoren orthogonal zueinander sind. Dagegen ist die Reihenfolge für die Orientierung entscheidend:

Beispiel 7.10.2 (a) Das System $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ist rechtshändig orientiert.

Denn die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ zeigen in dieser Reihenfolge in Richtung der x -, y - und z -Achse des Koordinatensystems, was Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand entspricht.

(b) Das System $(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ ist linkshändig orientiert.

Denn halten wir den Daumen der linken Hand in Richtung \vec{e}_2 (erster angegebener Vektor) und den Zeigefinger in Richtung \vec{e}_1 (der zweite Vektor im System), so zeigt der Mittelfinger der linken Hand in Richtung von \vec{e}_3 . (Daumen weist in Richtung der positiven y -Achse, Zeigefinger in Richtung positive x -Achse, Mittelfinger in Richtung positive z -Achse.)

Mit der rechten Hand würde der Mittelfinger in die entgegengesetzte Richtung zeigen.

Das Vektorprodukt erzeugt nun aus zwei gegebenen (nicht parallelen) Vektoren \vec{a} und \vec{b} einen dritten Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$, der zu den anderen Vektoren immer die gleiche Orientierung aufweist:

Satz 7.10.3 Für $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$ ist das System $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ immer rechtshändig orientiert.

Beweis. Durch drehen des Koordinatensystems können wir annehmen, dass die x -Achse in Richtung von \vec{a} zeigt, und \vec{b} in der xy -Ebene liegt. Es gilt somit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_1 > 0, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für das Vektorprodukt ergibt sich damit

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 \end{pmatrix}.$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung anhand des Vorzeichens von b_2 :

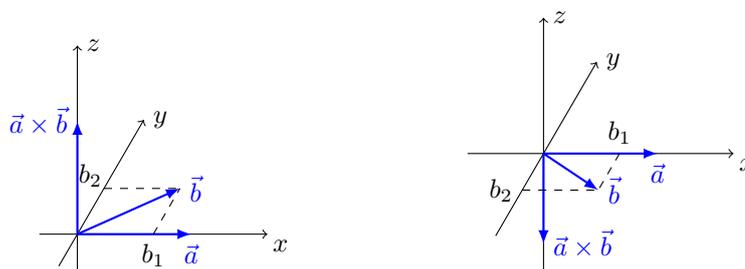


Abbildung 7.9: Zur Orientierung des Vektorprodukts

1. Fall $b_2 > 0$:

In diesem Fall ist $a_1 b_2 > 0$ und damit zeigt $\vec{a} \times \vec{b}$ in positive z -Richtung. Aus $b_2 > 0$ folgt außerdem, dass \vec{b} eine Komponente in positive y -Richtung hat. Die geometrische Situation ist in der linken Skizze von Abbildung 7.9 dargestellt. Aus der Skizze ergibt sich, dass $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ rechtshändig orientiert ist.

2. Fall $b_2 = 0$: Hier folgt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$; dieser Fall ist im Satz ausgeschlossen. (Wegen $b_2 = 0$ ist dann \vec{b} parallel zur x -Achse, also zu \vec{a} .)

3. Fall $b_2 < 0$:

Hier ist $a_1 b_2 < 0$, also zeigt $\vec{a} \times \vec{b}$ in negative z -Richtung. Außerdem hat \vec{b} eine Komponente in negative y -Richtung. Dies ist in Abbildung 7.9 rechts dargestellt. Die Skizze zeigt, dass auch in diesem Fall $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ rechtshändig orientiert ist.

□

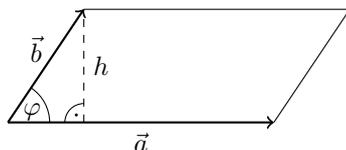
7.11 Vektorprodukt und Flächeninhalt

Wir leiten zuerst eine Formel für $|\vec{a} \times \vec{b}|$ her:

$$\begin{aligned}
 |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\
 &= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 b_2 a_3 b_3 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_1^2 - 2a_1 b_1 a_3 b_3 + a_1^2 b_3^2 \\
 &\quad + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2 \\
 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\
 &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2
 \end{aligned} \tag{7.34}$$

Im vorletzten Schritt haben wir die binomische Formel für den Term $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$ benutzt:

$$\begin{aligned}
 (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 &= a_1^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 (a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\
 &= a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + 2a_1 b_1 a_3 b_3 + 2a_2 b_2 a_3 b_3
 \end{aligned}$$

Abbildung 7.10: Parallelogramm, aufgespannt von \vec{a} und \vec{b}

In der vorletzten Zeile von (7.34) heben sich damit Terme der Form $a_i^2 b_i^2$ auf. Benutzen wir jetzt die Beziehung (7.28) zwischen Skalarprodukt und dem Cosinus des Winkels $\varphi = \varphi(\vec{a}, \vec{b})$ zwischen den Vektoren,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi, \quad (7.35)$$

so ergibt sich aus (7.34)

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi)^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \varphi,$$

wobei wir im letzten Schritt noch $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ benutzt haben. Ziehen wir jetzt die Wurzel so folgt schließlich

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi, \quad \varphi = \varphi(\vec{a}, \vec{b}). \quad (7.36)$$

(Man beachte hier, dass $\sqrt{\sin^2 \varphi} = |\sin \varphi| = \sin \varphi$ da $0 \leq \varphi \leq \pi$.)

Die Formel (7.36) für das Vektorprodukt ist also ganz ähnlich zu der Formel (7.35) für das Skalarprodukt.

Aus (7.36) können wir nun einen Zusammenhang zwischen Vektorprodukt und dem Flächeninhalt eines Parallelogramms ableiten. Wir betrachten das Parallelogramm, das von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird, siehe Abbildung 7.10. Die Höhe h des Parallelogramms können wir mit dem eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck berechnen (Hypotenuse \vec{b}):

$$h = |\vec{b}| \sin \varphi.$$

Der *Flächeninhalt des Parallelogramms*, das von \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird, ist damit

$$A = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi,$$

also

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (7.37)$$

7.12 Das Spatprodukt

Das Spatprodukt ist ein Produkt von drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ im Raum, das eine Zahl (Skalar) als Ergebnis hat. Es ist eine Kombination aus Vektor- und Skalarprodukt:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (7.38)$$

heißt *Spatprodukt* von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Wie das Vektorprodukt ist auch das Spatprodukt nur für Vektoren in \mathbb{R}^3 definiert (sonst kann $\vec{a} \times \vec{b}$ nicht berechnet werden!)

Wir leiten zunächst eine alternative Formel zur Berechnung des Spatprodukts her. Dazu rechnen wir beide Produkte in (7.38) explizit aus:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 \end{aligned}$$

Das Ergebnis kann man mithilfe einer sogenannten *Determinante* darstellen. Dazu bildet man die 3×3 -Matrix, die die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nacheinander als Spalten enthält, und berechnet davon die Determinante:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (7.39)$$

Das Bildungsgesetz der 3×3 -Determinante kann man sich mit der *Regel von Sarrus* durch das folgende Schema merken: Man schreibt die ersten beiden Spalten der Matrix noch einmal rechts daneben hin und berechnet dann die Produkte entlang der Diagonalen, wobei die Diagonalen von links oben nach rechts unten (blau) addiert, die von links unten nach rechts oben (rot) subtrahiert werden.

$$\begin{array}{cccccc} & + & + & + & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 & \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 & \\ & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 & \\ & - & - & - & & \end{array}$$

Also

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1. \end{aligned}$$

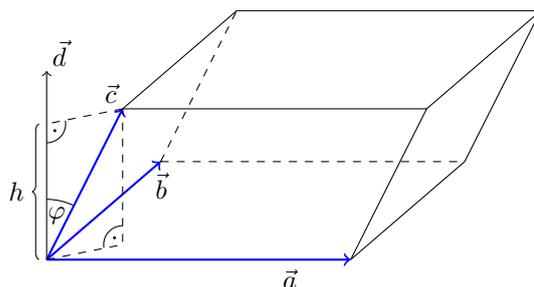
Das sind tatsächlich dieselben Terme, wie bei der Berechnung des Spatproduktes als $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Nun untersuchen wir die *geometrische Bedeutung* des Spatproduktes. Hierzu benutzen wir die Beziehung (7.28) zwischen dem Skalarprodukt zweier Vektoren und dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels: Mit der Abkürzung $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ gilt

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \varphi = |\vec{d}| |\vec{c}| \cos \varphi \quad (7.40)$$

mit $\varphi = \varphi(\vec{c}, \vec{d})$. Wir unterscheiden nach dem Winkel φ zwei Fälle:

Fall $\varphi < \frac{\pi}{2}$: In diesem Fall ist zwischen den Vektoren \vec{c} und $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ ein spitzer Winkel. Da das System $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ rechtshändig orientiert ist (Satz 7.10.3), ist daher auch $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ rechtshändig orientiert. (Denn \vec{c} bleibt auf derselben Seite der Fläche von \vec{a} und \vec{b} , auf der auch $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ liegt.) Wir betrachten jetzt den *Spat* (auch *Parallelepiped* genannt), der von den drei Vektoren

Abbildung 7.11: Zum Spatprodukt der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannt wird, siehe Abbildung 7.11. Ein Spat ist also sozusagen ein nicht-rechtwinkliger Quader, und $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind hier genau die Seiten des Spats. Aus der Skizze sehen wir, dass die Höhe des Spats

$$h = |\vec{c}| \cos \varphi$$

ist. Andererseits ist $|\vec{a} \times \vec{b}|$ gleich der Fläche des Parallelogramms, das von \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird; das ist genau die Grundfläche des Spats. Das Volumen V des Spats ist Grundfläche mal Höhe, und aus (7.40) folgt somit

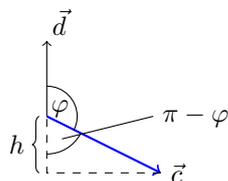
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot h = V.$$

Das Volumen ist also gleich dem Spatprodukt.

Fall $\varphi > \frac{\pi}{2}$: Jetzt ist zwischen \vec{c} und \vec{d} ein stumpfer Winkel. Daher liegt \vec{c} nun „unter“ der durch \vec{a}, \vec{b} gegebenen Grundfläche, also auf der anderen Seite von \vec{d} . Also ist $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ linkshändig orientiert. Der Spat liegt jetzt ebenfalls „unterhalb“ der Grundfläche. Seine Höhe ist hier

$$h = |\vec{c}| \cos(\pi - \varphi) = -|\vec{c}| \cos \varphi,$$

denn $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi > 0$.



Das Volumen des Spats somit in diesem Fall

$$V = -|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \varphi = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}].$$

Es gibt noch einen dritten Fall, wenn nämlich $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dann ist $\vec{c} \perp \vec{d}$, d.h. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ liegen in einer Ebene. Wegen (7.40) ist dann $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$.

Insgesamt ergibt sich also folgende geometrische Bedeutung des Spatproduktes:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{cases} V > 0 & \text{wenn } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ rechtshändig orientiert,} \\ -V < 0 & \text{wenn } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ linkshändig orientiert,} \\ 0 & \text{wenn } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ in einer Ebene liegen.} \end{cases} \quad (7.41)$$

Dabei ist V wieder das Volumen des Spats, das von den drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannt wird.

Kapitel 8

Geraden und Ebenen im Raum

In diesem Kapitel schauen wir uns verschiedene Formen von Gleichungen an, mit denen man Geraden und Ebenen im Raumen darstellen kann.

Hinweis: In den alten Mathematik A&B Skripten finden sie den Stoff dieses Kapitels im Skript Mathematik A, Kapitel 4.5.

8.1 Parameterdarstellung von Geraden

In Parameterdarstellungen von Geraden (und später von Ebenen) werden Punkte im Raum durch Vektoren beschrieben. Einem Punkt P wird dabei sein *Ortsvektor* $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ zugeordnet. Der Ortsvektor \vec{p} zeigt also vom Koordinatenursprung auf den Punkt P . Punkt und Ortsvektor haben damit genau die gleichen Koordinaten bzw. Komponenten:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad P = (p_1, p_2, p_3).$$

Eine Gerade g im Raum ist festgelegt durch einen Punkt P , der auf der Geraden liegt, und die Richtung der Gerade. Diese Richtung kann zum Beispiel durch einen Vektor \vec{a} definiert sein, den *Richtungsvektor*. Das führt auf die Gleichung der Gerade in *Punkt-Richtungsform*:

$$g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (8.1)$$

Die Gleichung liefert für jeden Wert des Parameters t den Ortsvektor \vec{x} eines Punktes auf der Geraden. Das ist in Abbildung 8.1 illustriert: Vom Punkt P aus geht man in Richtung von \vec{a} eine geeignete Strecke, um bis zum Punkt von \vec{x} zu gelangen. Dazu addiert man zu \vec{p} den gestreckten – oder gestauchten – Richtungsvektor $t\vec{a}$. Der Punkt zu \vec{x} kann natürlich auch auf der anderen Seite von P liegen, also in entgegengesetzter Richtung von \vec{a} . Für solche Punkte ist $t < 0$.

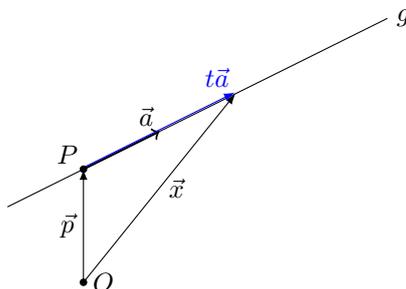


Abbildung 8.1: Parameterdarstellung einer Geraden

Beispiel 8.1.1 Gegeben ist die Gerade in Punkt-Richtungsform

$$g: \vec{x} = \vec{p} + t\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Durch Einsetzen konkreter Werte für den Parameter t kann man konkrete Punkte auf der Geraden berechnen. Zum Beispiel ergibt sich für $t = 2$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Also ist $(-4, 9, -2)$ ein Punkt auf g .

- (b) Andersherum kann man für einen gegebenen Punkt bestimmen, ob dieser Punkt auf der Geraden liegt. Dazu untersucht man, ob sich dieser Punkt für einen bestimmten Parameterwert von t aus der Punkt-Richtungsform ergibt.

Sei zum Beispiel der Punkt $Q = (5, 6, 2)$ gegeben. Liegt Q auf g ? D.h. gibt es einen Wert von t für den

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

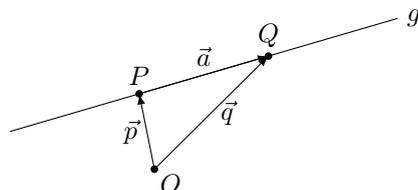
gilt? Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

woraus sich wiederum drei Gleichungen für t ergeben:

$$\begin{cases} -3t = 3 & \Leftrightarrow t = -1 \\ t = -1 & \Leftrightarrow t = -1 \\ -t = 2 & \Leftrightarrow t = -2 \end{cases}$$

Dies ist ein Widerspruch: Damit (8.2) gilt, müsste aufgrund der ersten beiden Komponenten $t = -1$ gelten, aufgrund der dritten Komponente aber $t = -2$. Also gibt es keinen Wert t , für den (8.2) gilt. Also liegt der Punkt Q nicht auf der Geraden.

Abbildung 8.2: Gerade gegeben durch zwei Punkte P und Q

8.2 Gerade gegeben durch zwei Punkte

Eine Gerade ist auch durch die Angabe von zwei Punkten auf der Geraden festgelegt. Sind P und Q zwei Punkte auf der Geraden g , und $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$ die zugehörigen Ortsvektoren, so ist der Vektor

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$$

ein Richtungsvektor der Geraden, siehe Abbildung 8.2. Setzen wir das in die Punkt-Richtungsform (8.1) ein, erhalten wir

$$g : \vec{x} = \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p}), \quad t \in \mathbb{R} \quad (8.3)$$

als Gleichung für die Gerade durch die beiden Punkte P und Q .

Beachte: Parameterdarstellungen sind nicht eindeutig. Zum Beispiel beschreiben die folgenden drei Gleichung auch alle die Gerade durch die Punkte P und Q , genauso wie (8.3).

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{q} + t(\vec{p} - \vec{q}) \\ \vec{x} &= \vec{p} + t(\vec{p} - \vec{q}) \\ \vec{x} &= \vec{p} + t \cdot 2(\vec{p} - \vec{q}) \end{aligned}$$

In der ersten Gleichung wurden die Rollen von \vec{p} und \vec{q} vertauscht; der feste Punkt in der Parameterdarstellung ist jetzt Q und der Richtungsvektor ist $\vec{p} - \vec{q} = \overrightarrow{QP}$ ($= -\overrightarrow{PQ} = -(\vec{q} - \vec{p})$). In der zweiten Gleichung ist der Richtungsvektor weiter \overrightarrow{QP} , der feste Punkt ist aber P . Schließlich wurde in der letzten Gleichung der Richtungsvektor um den Faktor 2 gestreckt ($2(\vec{p} - \vec{q}) = 2\overrightarrow{QP}$). Alle Gleichung ergeben dieselbe Gerade g , da die Richtungsvektoren aller Gleichungen in dieselbe (oder die entgegengesetzte) Richtung zeigen und die festen Punkte jeweils Punkte auf g sind.

Zwar ergeben alle Gleichung dieselbe Gerade, ein konkreter Punkt \vec{x} auf der Geraden hat aber (im Allgemeinen) in jeder Gleichung einen anderen Parameterwert t !

8.3 Parameterdarstellung von Ebenen

Ebenen kann man ähnlich wie Geraden durch eine Parameterdarstellung beschreiben. Eine Ebene E im Raum ist festgelegt durch einen Punkt P auf der

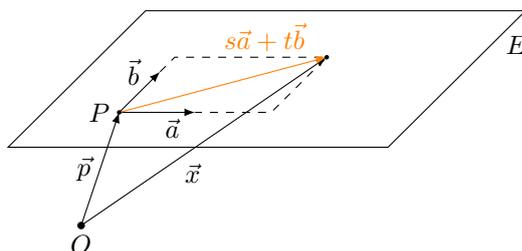
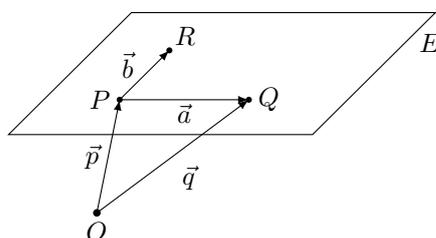


Abbildung 8.3: Parameterdarstellung einer Ebene

Abbildung 8.4: Ebene durch drei Punkte P , Q und R

Ebene und zwei Richtungsvektoren \vec{a} und \vec{b} , die *in E liegen*, die also parallel zur Ebene sind. \vec{a} und \vec{b} müssen natürlich in zwei verschiedene Richtungen zeigen, um die Ebene aufzuspannen. Die Vektoren dürfen also nicht parallel zueinander sein, d.h. es muss gelten

$$\vec{b} \neq r\vec{a} \quad \text{für jedes } r \in \mathbb{R}.$$

Die Parameterdarstellung der Ebene ist nun

$$E : \vec{x} = \vec{p} + s\vec{a} + t\vec{b}, \quad s, t \in \mathbb{R}. \quad (8.4)$$

Die Konstruktion ist ähnlich wie bei der Punkt-Richtungsform einer Geraden: Vom festen Punkt P aus geht man mit $s\vec{a}$ ein Stück in Richtung von \vec{a} und dann mit $t\vec{b}$ ein Stück in Richtung von \vec{b} , siehe Abbildung 8.3.

Genau wie bei Geraden ist die Parameterdarstellung nicht eindeutig. Man erhält dieselbe Ebene, wenn man für P irgendeinen anderen Punkt auf der Ebenen wählt, oder für die Richtungsvektoren \vec{a}, \vec{b} andere Vektoren, die in E liegen.

Eine Ebene ist auch durch drei Punkte P, Q, R bestimmt, die in ihr liegen. Aus den drei Punkten können wir Richtungsvektoren definieren:

$$\vec{a} = \vec{PQ} = \vec{q} - \vec{p}, \quad \vec{b} = \vec{PR} = \vec{r} - \vec{p},$$

siehe Abbildung 8.4. Dies ergibt dann für die Ebene die Gleichung

$$E : \vec{x} = \vec{p} + s(\vec{q} - \vec{p}) + t(\vec{r} - \vec{p}), \quad s, t \in \mathbb{R}. \quad (8.5)$$

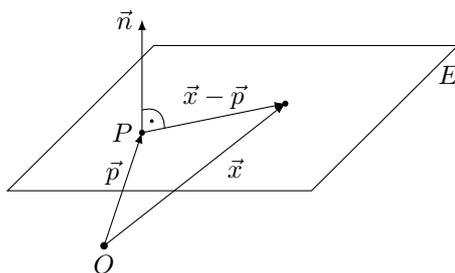


Abbildung 8.5: Normalenform einer Ebene

8.4 Normalenform von Ebenen

Für Ebenen gibt es neben der Parameterdarstellung (mit den beiden Parametern s, t) noch eine andere Form der Darstellung. Die Idee ist, dass man die Lage einer Ebene im Raum auch durch einen Vektor festlegen kann, der *senkrecht* zur Ebene steht. Ein solcher Vektor \vec{n} , der senkrecht auf E steht, heißt *Normalenvektor* zur Ebene E . Man schreibt das auch kurz als $\vec{n} \perp E$.

Um die Position der Ebene jetzt komplett festzulegen, braucht man wieder einen festen Punkt P der auf E liegt. Sei \vec{p} der Ortsvektor von P . Wir suchen nun die Gleichung, die beschreibt, wann ein beliebiger Punkt in E liegt. Dazu beachte, dass ein Punkt mit Ortsvektor \vec{x} genau dann in E liegt, wenn der Vektor vom festen Punkt P zum Punkt, also $\vec{x} - \vec{p}$, in der Ebene liegt. Und $\vec{x} - \vec{p}$ liegt in E , beziehungsweise parallel zu E , genau dann, wenn $\vec{x} - \vec{p}$ senkrecht zu \vec{n} steht. (Denn $\vec{n} \perp E$.) Das ist in Abbildung 8.5 skizziert. Als Formel geschrieben liegt also der Punkt zu \vec{x} genau dann auf E , wenn

$$\vec{x} - \vec{p} \perp \vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0.$$

(Erinnerung: zwei Vektoren sind orthogonal genau dann, wenn ihr Skalarprodukt Null ist, siehe Satz 7.6.4.) Dies ist die *Normalenform* (oder Normalengleichung) der Ebene:

$$E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0 \tag{8.6}$$

Auch die Normalenform einer Ebene ist nicht eindeutig, denn \vec{p}, \vec{n} sind nicht eindeutig.

Einen Normalenvektor \vec{n} kann man mit dem Vektorprodukt aus Richtungsvektoren \vec{a}, \vec{b} der Ebene berechnen:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}. \tag{8.7}$$

(Denn dann ist $\vec{n} \perp \vec{a}, \vec{n} \perp \vec{b}$ und damit $\vec{n} \perp E$.)

Aus der Normalenform einer Ebene kann man schließlich noch die sogenannte *Koordinatenform* erhalten. Dazu rechnet man die Skalarprodukte in (8.6) explizit aus:

$$\begin{aligned} (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0 &\Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \vec{p} \cdot \vec{n} \\ &\Leftrightarrow n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d \quad \text{wobei } d = \vec{p} \cdot \vec{n}. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Die sich ergebende Gleichung

$$E : n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d \quad (8.9)$$

ist die Koordinatenform der Ebene.

Beispiel 8.4.1 Wir betrachten die Ebene E durch die Punkte

$$P = (1, 2, 3), \quad Q = (3, 2, 4), \quad R = (0, 5, 4).$$

Für diese Ebene bestimmen wir nun nacheinander alle drei Formen der Ebenengleichung. Für die *Parameterform* berechnen wir die beiden Richtungsvektoren

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist (eine) Parameterform der Ebene

$$E : \vec{x} = \vec{p} + s\vec{a} + t\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die *Normalenform* berechnen wir mit dem Vektorprodukt einen Normalenvektor:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da für den Normalenvektor nur entscheidend ist, dass er senkrecht auf E steht, ist seine Länge nicht wichtig. Wir können daher \vec{n} noch vereinfachen zu

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{3}\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Normalenform der Ebene ist damit

$$E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Durch ausmultiplizieren der Skalarprodukte erhalten wir daraus schließlich die *Koordinatenform* von E :

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow -x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 - 2 + 6 = 3 \end{aligned}$$

also

$$E : -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3.$$

Bemerkung:

- (a) Die Umformungen von der Normalen- zur Koordinatenform in (8.8) sind Äquivalenzumformungen, also umkehrbar. Man kann daher auch aus einer gegebenen Koordinatenform wieder zur Normalenform kommen: Den Normalenvektor kann man direkt ablesen, und einen Punkt P in der Ebene erhält man durch geeignete Wahl von zwei Koordinaten und Berechnung der dritten Koordinate aus der Koordinatenform der Ebene.
- (b) Eine Gerade im Raum lässt sich auch in einer Koordinatenform schreiben: Sie besteht aus zwei Gleichungen der Art (8.9). (Das entspricht dem Schnitt von zwei Ebenen!) Aus der Parameterform einer Gerade erhält man die Koordinatenform z.B. dadurch, dass man eine Vektorkomponente der Gleichung nach dem Parameter t auflöst, und diesen Ausdruck für t dann in die beiden anderen Komponenten einsetzt.

Kapitel 9

Matrizen

In diesem Kapitel betrachten wir Matrizen und ihre Eigenschaften und Rechenregeln. Wir kennen Matrizen schon als Koeffizientenmatrizen bei linearen Gleichungssystemen, und daher werden auch oft die Beispiele in diesem Kapitel kommen. Matrizen spielen aber in vielen Bereichen der Mathematik und den Anwendungen eine wichtige Rolle, nicht nur bei linearen Gleichungssystemen.

Hinweis: In den alten Mathematik A&B Skripten finden sie den Stoff dieses Kapitels im Skript Mathematik A, Kapitel 6.

9.1 Matrizen und das Matrix-Vektor-Produkt

Definition 9.1.1 Ein rechteckiges Zahlenschema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt $m \times n$ -Matrix. m ist die Anzahl der Zeilen und n die Anzahl der Spalten der Matrix. Die Zahlen a_{ij} sind die *Koeffizienten* der Matrix. Sie können reell oder komplex sein, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ oder $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Um beide Fälle gleichzeitig zu erfassen, benutzt man die Schreibweise $a_{ij} \in \mathbb{K}$, wobei entweder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt. Die Menge aller $m \times n$ -Matrizen schreibt man als

$$\mathbb{K}^{m \times n} = \{\text{alle } m \times n\text{-Matrizen mit Koeffizienten aus } \mathbb{K}\}.$$

Man nennt \mathbb{K} einen *Körper*. Mit der Schreibweise $\mathbb{K}^{m \times n}$ ist also der Körper der Matrix festgelegt, sowie die Anzahl der Zeilen und Spalten (auch *Dimension* der Matrix genannt).

Matrizen werden meist mit großen Buchstaben A, B, C, \dots bezeichnet. Man beachte auch nochmal die Konvention für die Indexreihenfolge, die wir schon von linearen Gleichungssystemen kennen: in a_{ij} steht der erste Index i für die Zeilennummer, der zweite Index j ist die Spaltennummer. Genauso steht in $m \times n$ zuerst die Anzahl der Zeilen m , dann die Anzahl der Spalten n .

Zum Beispiel gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}.$$

$C \in \mathbb{C}^{3 \times 4}$ bedeutet, dass C eine Matrix mit 3 Zeilen und 4 Spalten ist, deren Komponenten komplexe Zahlen sein können.

Die erste wichtige Operation für Matrizen ist die Multiplikation mit einem Vektor:

Definition 9.1.2 (Matrix-Vektor-Produkt) Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$, also

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

definiert man das Produkt $A\vec{x}$ durch

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}. \quad (9.1)$$

Es gilt somit $A\vec{x} \in \mathbb{K}^m$.

Formel (9.1) besagt, dass der Vektor \vec{x} nacheinander mit den einzelnen Zeilen von A multipliziert wird; die Multiplikation „Zeile mal Vektor“ erfolgt wie beim Skalarprodukt (und ergibt jeweils eine Zahl).

Das Matrix-Vektor-Produkt ermöglicht eine praktische Kurzschreibweise für lineare Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \iff A\vec{x} = \vec{b}. \quad (9.2)$$

Dabei ist

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

der Vektor der rechten Seite des Gleichungssystems.

Beachte: Damit das Produkt $A\vec{x}$ definiert ist, muss die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Komponenten von \vec{x} sein, nämlich n . Anders gesagt: die Zeilen von A und der Vektor \vec{x} müssen gleich lang sein, damit die Multiplikation „Zeile mal Vektor“ in (9.1) möglich ist. Bei der Multiplikation treffen dann die n Spalten von A auf die n Komponente von \vec{x} und „verschwinden“ dabei; übrig bleiben die m Zeilen von A im Ergebnis, also ein Vektor aus \mathbb{R}^m :

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n}, \quad \vec{x} \in \mathbb{K}^n \quad \Rightarrow \quad A\vec{x} \in \mathbb{K}^m.$$

Beispiel 9.1.3 Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \quad \text{und} \quad \vec{x} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Die Anzahl der Spalten von A ist gleich der Anzahl von Komponenten von \vec{x} ($= 3$). Das Matrix-Vektor-Produkt $A\vec{x}$ ist damit definiert. Die Berechnung liefert

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Das Matrix-Vektor-Produkt hat die wichtige Eigenschaft der *Linearität*:¹

Lemma 9.1.4 (Linearität des Matrix-Vektor-Produkts) Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Dann gilt für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n$ und $r \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} A(\vec{x} + \vec{y}) &= A\vec{x} + A\vec{y} \\ A(r\vec{x}) &= rA\vec{x} \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis ist einfach: Die i . Komponente von

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

ist

$$a_{i1}(x_1 + y_1) + \cdots + a_{in}(x_n + y_n) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n,$$

was genau die i . Komponente von $A\vec{x} + A\vec{y}$ ist. Die Rechnung für $A(r\vec{x}) = rA\vec{x}$ ist ähnlich. \square

9.2 Kern einer Matrix und Lösungsstruktur linearer Gleichungssysteme

Unter Ausnutzung der Linearität des Matrix-Vektor-Produkts untersuchen wir jetzt die Struktur der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$. Dabei spielt der *Kern* der Matrix A eine wichtige Rolle.

Definition 9.2.1 Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ heißt die Menge

$$\text{Kern } A = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \right\} \quad (9.3)$$

der Kern von A . (Eine andere Bezeichnung ist „Nullraum“ $N(A)$)

¹Linearität, also die Verträglichkeit mit Addition und der Multiplikation mit Zahlen, ist eine grundlegende mathematische Eigenschaft, die in ganz verschiedenen mathematischen Situationen auftritt und jedesmal zu ganz ähnlichen Konsequenzen führt. Wir haben schon *lineare* Gleichungssysteme kennengelernt. Weiter haben z.B. Determinanten und Integrale die Eigenschaft der Linearität.

Es gilt somit

$$\vec{x} \in \text{Kern } A \Leftrightarrow \vec{x} \text{ Lösung des homog. Gleichungssystems } A\vec{x} = \vec{0}.$$

Anders gesagt ist Kern A genau die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$.

Beispiel 9.2.2 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 - 12 + 6 \\ -3 + 3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit ist $\vec{x} \in \text{Kern } A$.

Satz 9.2.3 (Struktur der Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$) Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$. Das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ sei lösbar mit Rang r . Dann ist die allgemeine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ von der Form

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k \quad (9.4)$$

mit den $k = n - r$ freien Parametern $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$. Dabei ist

- \vec{x}_0 eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$;
- $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ sind Lösungen des homogenen Systems $A\vec{x} = \vec{0}$, also

$$A\vec{u}_1 = \dots = A\vec{u}_k = \vec{0},$$

d.h. $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in \text{Kern } A$.

Für die allgemeine Lösung (9.4) des inhomogenen Systems gilt $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_h$ wobei

$$\vec{x}_h = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k \quad (9.5)$$

die allgemeine Lösung des homogenen Systems $A\vec{x} = \vec{0}$ ist.

Beweis. Der Gaußalgorithmus liefert uns eine Lösung mit $k = n - r$ freien Parametern $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, die man in der Form (9.4) schreiben kann. (Vergleiche dazu die Beispiele in Kapitel 6 und auch das folgende Beispiel.) Für jede Wahl von $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ ergibt (9.4) also eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$.

Wählen wir speziell $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, so bekommen wir die Lösung $\vec{x} = \vec{x}_0$, d.h. es gilt $A\vec{x}_0 = \vec{b}$.

Für beliebige $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ist

$$\vec{x}_h = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k = \vec{x} - \vec{x}_0$$

und aus der Linearität des Matrix-Vektor-Produkts folgt nun

$$A\vec{x}_h = A(\vec{x} - \vec{x}_0) = A\vec{x} - A\vec{x}_0 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Also ist \vec{x}_h Lösung des homogenen Systems.

Wählen wir jetzt wieder speziell z.B. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, dann ist $\vec{x}_h = \vec{u}_1$ und damit $A\vec{u}_1 = \vec{0}$. Wählt man einen der anderen Parameter $\lambda_i = 1$, so folgt entsprechend $A\vec{u}_i = \vec{0}$. \square

Beispiel 9.2.4 Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & 1 & -8 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ mit dem Gaußalgorithmus:

$$\begin{aligned} (A|b) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & -6 & 1 & -8 & -4 \end{array} \right) + 3I \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & -10 \end{array} \right) \cdot (-\frac{1}{2}) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dies ist die Zeilen-Stufenform, der Rang ist $r = 2$. Also haben wir $n - r = 4 - 2 = 2$ freie Parameter. Da die Stufen in der 1. und 3. Spalte beginnen, wählen wir als Parameter x_2 und x_4 :

$$x_2 = \lambda_1, \quad x_4 = \lambda_2.$$

Rückwärtseinsetzen ergibt nun

$$\text{Zeile 2: } x_3 + 4x_4 = 5 \Rightarrow x_3 = 5 - 4\lambda_2$$

$$\text{Zeile 1: } x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \Rightarrow x_1 = -2 - 2\lambda_1 + (5 - 4\lambda_2) = 3 - 2\lambda_1 - 4\lambda_2.$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2\lambda_1 - 4\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ 5 - 4\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir haben die Lösung hier nach den Anteilen mit und ohne Parameter zerlegt. Wie man sieht, ist also die Lösung von der Form

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \quad \text{mit} \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

genau wie in Satz 9.2.3 beschrieben.

9.3 Matrizenrechnung

Genau wie bei Vektoren definiert man auch für Matrizen die komponentenweise Addition und die Multiplikation mit einem Skalar.

Für $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sind $A + B$ und αA definiert durch

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (9.7)$$

Die $m \times n$ -Nullmatrix ist

$$\mathbf{0} = 0_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}. \quad (9.8)$$

Die zweite Schreibweise $0_{m \times n}$ für die Nullmatrix dient der Unterscheidung von der Zahl Null, falls nicht aus dem Zusammenhang klar ist, dass die Nullmatrix gemeint ist. Die negative Matrix schließlich ist

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

Genau wie bei Vektoren hat man auch hier eine komponentenweise Subtraktion, die durch $A - B = A + (-B)$ gegeben ist.

Es gelten folgende Rechenregeln (dieselben wie bei Vektoren):

Satz 9.3.1 Für $A, B, C \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:

- (1) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- (2) $A + B = B + A$
- (3) $A + 0_{m \times n} = A$
- (4) $A + (-A) = 0_{m \times n}$
- (5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- (6) $1A = A, \quad (-1)A = -A$
 $0A = 0_{m \times n}, \quad \alpha 0_{m \times n} = 0_{m \times n}$
- (7) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Beispiel 9.3.2 Gegeben seien die beiden 2×2 -Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist zum Beispiel

$$2A - B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.4 Die transponierte Matrix

Zu jeder $m \times n$ -Matrix A ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

ist die *transponierte Matrix* A^\top definiert durch

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (9.10)$$

Die transponierte Matrix ist also eine $n \times m$ -Matrix, $A^\top \in \mathbb{K}^{n \times m}$, die aus A dadurch entsteht, dass man die Spalten von A in die Zeilen von A^\top schreibt. Genauso sind die Zeilen von A die Spalten von A^\top .

Zum Beispiel gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Transponieren verwendet man gelegentlich auch bei Vektoren: Aus dem *Spaltenvektor*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

wird dann der *Zeilenvektor*

$$\vec{x}^\top = (x_1, \dots, x_n).$$

Tatsächlich ist der Spaltenvektor $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ (auch) eine $n \times 1$ -Matrix, der Zeilenvektor \vec{x}^\top eine $1 \times n$ -Matrix.

Für das Transponieren gelten diese *Rechenregeln*: ($A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}, \alpha \in \mathbb{K}$)

$$(A + B)^\top = A^\top + B^\top \quad (9.11)$$

$$(\alpha A)^\top = \alpha A^\top \quad (9.12)$$

$$(A^\top)^\top = A \quad (9.13)$$

9.5 Matrixmultiplikation

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Multiplikation von Matrizen miteinander. Wir benutzen dabei die *Kurzschreibweise*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n} \quad (9.14)$$

für eine $m \times n$ -Matrix mit den Einträgen a_{ij} .

Definition 9.5.1 Sei $A = (a_{ij})_{m \times n} \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times r} \in \mathbb{K}^{n \times r}$. Dann ist das *Matrixprodukt* AB definiert durch

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ & b_{nj} & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.15)$$

Es wird hier die i . Zeile von A mit der j . Spalte von B multipliziert, in der Form

$$(a_{i1} \quad \cdots \quad a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \quad (9.16)$$

und das Ergebnis ist der Eintrag in der i . Zeile und j . Spalte vom Produkt AB . Anders gesagt ist $AB = (c_{ij})_{m \times r} \in \mathbb{K}^{m \times r}$ wobei

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Beachte: Damit das Produkt AB definiert ist, muss für die Rechnung „Zeile mal Spalte“ die Länge der Zeilen von A gleich der Länge der Spalten von B sein. Also muss die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B sein (gleich n). Jede Zeile von A ergibt durch Multiplikation mit allen Spalten von B eine Zeile vom Produkt AB . Genauso ergibt jede Spalte von B durch Multiplikation mit den Zeilen von A eine Spalte von AB . Die Produktmatrix AB hat daher genauso viele Zeilen wie A und genauso viele Spalten wie B . Kurz:

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{n \times r} \Rightarrow AB \in \mathbb{K}^{m \times r} \quad (9.17)$$

Beispiel 9.5.2 Wir betrachten die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Anzahl der Spalten von A ist 2, also gleich der Anzahl Zeilen von B . Daher ist das Produkt AB definiert. Wir errechnen

$$AB = \begin{pmatrix} x \cdot 1 + y \cdot (-2) & x \cdot 2 + y \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) & 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y & 2x + y \\ -1 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Beachte wie zum Beispiel in der ersten Spalte von AB genau die Produkte der ersten Spalte von B mit allen Zeilen von A stehen. Es gilt $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ und $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, und daher ist dann $AB \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$.

Andere Formen der Darstellung von AB und $A\vec{x}$

Es gibt noch verschiedene andere Arten, die Bildung des Matrixprodukts AB (und auch von $A\vec{x}$) darzustellen, als nur „Zeile mal Spalte“. Je nach Situation kann es hilfreich sein, eine dieser anderen Darstellungen zu verwenden, z.B. für die Berechnung.

1. Sei $\vec{s}_j \in \mathbb{K}^n$ die j . Spalte der Matrix $B = (b_{ij})_{n \times r}$,

$$\vec{s}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}.$$

Dann ist das Matrix-Vektor-Produkt

$$A\vec{s}_j = \begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} + \cdots + a_{1n}b_{nj} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{1j} + \cdots + a_{mn}b_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

genau gleich der j . Spalte von AB . Wir können also schreiben

$$B = (\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_r) \in \mathbb{K}^{n \times r} \Rightarrow AB = (A\vec{s}_1, \dots, A\vec{s}_r) \in \mathbb{K}^{m \times r}. \quad (9.18)$$

Diese Schreibweise sagt, dass wenn B aus den Spalten(vektoren) $\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_r$ besteht, dann hat AB die Spalten $A\vec{s}_1, \dots, A\vec{s}_r$. Die Spalten von AB sind also die Produkte von A mit den Spalten von B .

2. Jetzt eine alternative Darstellung des Matrix-Vektor-Produkts $A\vec{x}$. Dazu sei

$$\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

die j . Spalte von $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Dann gilt für den Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,$$

dass

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Also

$$A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)_{m \times n} \Rightarrow A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n. \quad (9.19)$$

Man sagt, dass $A\vec{x}$ eine *Linearkombination* der Spalten von A ist.

3. In Punkt 1 haben wir die Spalten von AB beschrieben. Das gleiche machen wir jetzt mit den Zeilen. Sei dazu $\vec{z}_i^\top = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ die i . Zeile von A (Zeilenvektor!), so dass wir die Matrix A als

$$A = \begin{pmatrix} \vec{z}_1^\top \\ \vdots \\ \vec{z}_m^\top \end{pmatrix}$$

schreiben können. Es gilt dann

$$AB = \begin{pmatrix} \vec{z}_1^\top B \\ \vdots \\ \vec{z}_m^\top B \end{pmatrix}, \quad (9.20)$$

d.h. die Zeilen von AB sind die Produkte der Zeilen von A mit der Matrix B . Diese Produkte Zeilenvektor \vec{z}_i^\top mal Matrix B sind dabei

$$\vec{z}_i^\top B = (\vec{z}_i^\top \vec{s}_1, \dots, \vec{z}_i^\top \vec{s}_r) \quad \text{mit} \quad \vec{z}_i^\top \vec{s}_j = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Diese letzte Gleichung ist genau „Zeile mal Spalte“ im Matrixprodukt, und deshalb ist $\vec{z}_i^\top B$ tatsächlich die i . Zeile von AB .

Entsprechend kann man die Spalten von $AB = (A\vec{s}_1, \dots, A\vec{s}_r)$ als

$$A\vec{s}_j = \begin{pmatrix} \vec{z}_1^\top \vec{s}_j \\ \vdots \\ \vec{z}_m^\top \vec{s}_j \end{pmatrix}$$

schreiben. Übrigens ist $\vec{z}_i^\top \vec{s}_j$ genau das Skalarprodukt von \vec{z}_i und \vec{s}_j , d.h. $\vec{z}_i^\top \vec{s}_j = \vec{z}_i \cdot \vec{s}_j$.

4. Sei $\vec{b}_i^\top = (b_{i1}, \dots, b_{in})$ die i . Zeile von B , also

$$B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1^\top \\ \vdots \\ \vec{b}_n^\top \end{pmatrix}.$$

Analog zu 2. kann man dann das Produkt von einem Zeilenvektor

$$\vec{y}^\top = (y_1, \dots, y_n)$$

mit B als Linearkombination der Zeilen von B schreiben:

$$\vec{y}^\top B = y_1 \vec{b}_1^\top + \dots + y_n \vec{b}_n^\top. \quad (9.21)$$

Beispiel 9.5.3 Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und die zwei Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Produkte von A mit den Vektoren können wir jetzt gemäß (9.19) als Linearkombination der Spalten von A berechnen:

$$A\vec{x} = 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{y} = 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Sei nun B die 2×2 -Matrix mit den Spalten \vec{x} und \vec{y} , also

$$B = (\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nach (9.18) ist dann das Matrixprodukt AB

$$AB = (A\vec{x}, A\vec{y}) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

(Man überzeuge sich, dass die „normalen“ Berechnung „Zeile mal Spalte“, also gemäß Definition 9.5.1, dasselbe Ergebnis für AB ergibt!)

Für die Matrixmultiplikation gelten folgende Rechenregeln:

Satz 9.5.4 Seien $A, \tilde{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B, \tilde{B} \in \mathbb{K}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{K}^{r \times s}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

$$(a) (A + \tilde{A})B = AB + \tilde{A}B, \quad A(B + \tilde{B}) = AB + A\tilde{B}$$

$$(b) (\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$$

$$(c) (AB)C = A(BC)$$

(d) Mit der $n \times n$ -Einheitsmatrix $E_n \in \mathbb{K}^{n \times n}$,

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.22)$$

gilt $AE_n = A = E_n A$

$$(e) (AB)^\top = B^\top A^\top$$

Beweis. Zu (e): Seien wieder \vec{z}_i^\top die Zeilen von A und \vec{s}_j die Spalten von B :

$$A = \begin{pmatrix} \vec{z}_1^\top \\ \vdots \\ \vec{z}_m^\top \end{pmatrix}, \quad B = (\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_r).$$

Dann ist

$$B^\top = \begin{pmatrix} \vec{s}_1^\top \\ \vdots \\ \vec{s}_r^\top \end{pmatrix}, \quad A^\top = (\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_m).$$

Für den Eintrag an der Stelle ij von AB (i . Zeile von A mal j . Spalte von B) gilt dann

$$\vec{z}_i^\top \vec{s}_j = \vec{z}_i \cdot \vec{s}_j = \vec{s}_j^\top \vec{z}_i.$$

Das ist also gleich der j . Zeile von B^\top mal der i . Spalte von A^\top , also gleich dem Eintrag ji von $B^\top A^\top$. Also ist $(AB)^\top = B^\top A^\top$. \square

Achtung!

Das Matrixprodukt ist nicht kommutativ. Zum Einen können die Produkte AB und BA , wenn sie beide definiert sind², verschiedene Größen haben. Zum Beispiel ist bei $A \in \mathbb{K}^{2 \times 3}$ und $B \in \mathbb{K}^{3 \times 2}$ $AB \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$ und $BA \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$. Beide Produkte können dann also schon aus Dimensionsgründen nicht gleich sein.

Und selbst wenn $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ quadratische $n \times n$ -Matrizen sind, so dass beide Produkte AB und BA definiert sind und die gleiche Dimension $n \times n$ haben, wird im Allgemeinen $AB \neq BA$ sein. (Probieren Sie das an Beispielen aus!)

9.6 Die inverse Matrix

Die Multiplikation mit einer Matrix A kann in bestimmten Fällen rückgängig gemacht werden, nämlich durch Multiplikation mit der inversen Matrix A^{-1} .

Definition 9.6.1 Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine quadratische $n \times n$ Matrix und $E = E_n$ die $n \times n$ -Einheitsmatrix (siehe (9.22)). Die Matrix A heißt *invertierbar*, wenn es eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt, so dass

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E \tag{9.23}$$

gilt. In diesem Fall heißt A^{-1} *Inverse* von A .

Bemerkung: Die Inverse A^{-1} ist eindeutig bestimmt, d.h. für eine gegebene Matrix A kann es nur eine Matrix A^{-1} geben, die (9.23) erfüllt. Denn angenommen, es gäbe zusätzlich zu A^{-1} noch die Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, die (9.23) erfüllt, für die also $AB = BA = E$ gilt. Dann würde folgen

$$AB = E \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_E B = A^{-1}E \Rightarrow B = A^{-1}.$$

Beide Matrizen A^{-1} und B sind also gleich, d.h. A^{-1} ist eindeutig bestimmt.

Folgende Rechenregeln gelten für die Inverse A^{-1} .

Satz 9.6.2 *Es gilt:*

- (a) Die Einheitsmatrix E ist invertierbar mit Inverse $E^{-1} = E$.
- (b) Ist A invertierbar, dann ist A^{-1} wieder invertierbar, und es gilt

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

²Damit AB und BA beide definiert sind, muss die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl Zeilen von B und die Anzahl Zeilen von A gleich der Anzahl Spalten von B sein.

(c) Sind die $n \times n$ -Matrizen A und B beide invertierbar, dann ist auch AB invertierbar, und es gilt

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(d) Ist A invertierbar, dann auch A^\top mit

$$(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top.$$

Beweis. Alle Aussagen folgen aus der Definition 9.6.1, indem man zeigt, dass die behauptete Inverse die Gleichung (9.23) für die jeweilige Matrix erfüllt. Zum Beispiel ist bei (c) für die Inverse von AB eine Matrix X gesucht, die $(AB)X = X(AB) = E$ erfüllt. Die Matrix $B^{-1}A^{-1}$ erfüllt diese Gleichung, denn

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A \underbrace{BB^{-1}}_E A^{-1} = AA^{-1} = E, \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1} \underbrace{A^{-1}A}_E B = B^{-1}B = E. \end{aligned}$$

Also erfüllt $B^{-1}A^{-1}$ die Definition der Inverse für AB , und somit ist AB invertierbar mit Inverser $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Im Fall (d) folgt durch transponieren der Gleichungen $AA^{-1} = E$ und $A^{-1}A = E$

$$(A^{-1})^\top A^\top = E^\top = E, \quad A^\top (A^{-1})^\top = E^\top = E.$$

Also ist A^\top invertierbar mit Inverser $(A^{-1})^\top$. □

Mithilfe der inversen Matrix kann man die Lösung eines (quadratischen) Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ berechnen. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine quadratische, invertierbare Matrix. In dem wir $A\vec{x} = \vec{b}$ von links mit der Inversen A^{-1} multiplizieren, erhalten wir

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_E \vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

D.h. wenn \vec{x} eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ ist, dann ist diese Lösung von der Form $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$. Die Implikation kann auch umgekehrt werden: Ist der Vektor $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ gegeben, dann folgt durch Multiplikation von links mit A

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow A\vec{x} = \underbrace{AA^{-1}}_E \vec{b} = \vec{b},$$

d.h. $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ ist eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$. Wir haben damit die Äquivalenz

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b} \tag{9.24}$$

gezeigt; sie besagt, dass das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat.

Satz 9.6.3 *Ist die quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar, dann hat das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ die eindeutige Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.*

Dass die Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix A (von links oder von rechts) eine Äquivalenzumformung ist, gilt allgemein: zum Beispiel ist für $B, C \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$$BA = C \quad \Leftrightarrow \quad B = CA^{-1}.$$

(Multiplikation von rechts mit A^{-1} bzw. A)

Nicht jede quadratische Matrix ist invertierbar. Der nächste Satz gibt einige Aussagen an, die zur Invertierbarkeit äquivalent sind. Später werden wir noch weitere Kriterien kennenlernen.

Satz 9.6.4 (Invertierbarkeitskriterium) *Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent: (also (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (5))*

- (1) A ist invertierbar
- (2) es gibt $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $AB = E$ (in diesem Fall ist $B = A^{-1}$)
- (3) es gibt $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $CA = E$ (in diesem Fall ist $C = A^{-1}$)
- (4) das homogene Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$ (d.h. Kern $A = \{\vec{0}\}$)
- (5) das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist für jedes $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ lösbar

Beweis. Die Beweisstrategie ist ein *Ringschluss*. Dabei werden nicht alle Äquivalenzen separat gezeigt, sondern nur Implikationen von einer Aussage zur nächsten, dann zur dritten und so weiter, bis man wieder bei der Aussage vom Anfang angelangt. Hier starten wir mit der Aussage (3).

- (3) \Rightarrow (4) Wir nehmen also an, dass (3) gilt und wollen dann (4) zeigen. Sei also C eine Matrix mit $CA = E$. Dann gilt durch Multiplikation von links mit C

$$A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{CA}_{E} \vec{x} = C\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

Das homogene System $A\vec{x} = \vec{0}$ hat also die nur die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$, d.h. (4) gilt.

- (4) \Rightarrow (5) Jetzt nehmen wir (nur) an, dass (4) gilt und wollen (5) zeigen. (4) heißt, dass das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat, dass also beim Gaußverfahren keine freien Parameter auftreten. Der Rang muss also gleich n sein (Anzahl der Spalten). Wenn wir jetzt das Gaußverfahren für das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ durchführen, haben wir wieder Rang = n (denn der Rang ist nur abhängig von A). Der Rang ist also gleich der Anzahl *Zeilen* (auch n), also gibt es keine Nullzeilen in der Zeilen-Stufenform, und damit hat das System $A\vec{x} = \vec{b}$ eine Lösung.

- (5) \Rightarrow (2) Wir benutzen die Standardbasisvektoren \vec{e}_j . Nach (5) hat das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{e}_j$ eine Lösung, die wir \vec{b}_j nennen. Es gilt also $A\vec{b}_j = \vec{e}_j$. Sei $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ die Matrix, die Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ als Spalten hat. Dann gilt (vergleiche (9.18))

$$AB = (A\vec{b}_1, \dots, A\vec{b}_n) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = E,$$

d.h. (2) gilt.

Wir haben bis jetzt die Implikationen $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (2)$ gezeigt. Insbesondere gilt also $(3) \Rightarrow (2)$ für jedes $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Wir zeigen damit jetzt:

$(2) \Rightarrow (3)$ Es gelte also $AB = E$. Transponieren wir diese Gleichung, erhalten wir $B^T A^T = E$. Das heißt, dass Aussage (3) für die Matrix A^T gilt. Weil wir schon wissen, dass $(3) \Rightarrow (2)$ gilt, gilt somit auch Aussage (2) für A^T . Somit gibt es eine Matrix D mit $A^T D = E$. Transponieren impliziert $D^T A = E$. Also gilt (3) für A mit $C = D^T$.

Damit haben wir nun den Ringschluss $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (2)$ vollendet. Somit sind alle diese Aussagen äquivalent,

$$(2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5).$$

Es bleibt noch die Äquivalenz mit (1) zu zeigen

$(1) \Rightarrow (2)$ Das ist trivial, wähle $B = A^{-1}$.

$(2) \wedge (3) \Rightarrow (1)$ (Da wir schon wissen, dass (2) und (3) äquivalent sind, können wir annehmen, dass beide Aussagen gelten.) Sei also $AB = E$ und $CA = E$ mit gewissen Matrizen B, C . Dann gilt

$$B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C,$$

beide Matrizen sind also gleich. Also ist $AB = BA = E$, d.h. A ist invertierbar und die Inverse ist $A^{-1} = B = C$.

□

9.7 Berechnung der inversen Matrix

Wir kommen jetzt zu der Frage, wie die inverse Matrix überhaupt berechnet werden kann. Ein allgemeines Verfahren gibt der folgende Satz.

Satz 9.7.1 (Berechnung von A^{-1}) Zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ bildet man zusammen mit der $n \times n$ -Einheitsmatrix E_n die erweiterte Matrix $(A|E_n)$. Man formt dann die erweiterte Matrix durch Zeilenumformungen so um, dass im linken Teil die Einheitsmatrix E_n entsteht:

$$(A|E_n) \Leftrightarrow (E_n|B) \tag{9.25}$$

A ist invertierbar genau dann, wenn diese Umformung möglich ist. In diesem Fall ist die im rechten Teil entstehende Matrix die Inverse $B = A^{-1}$.

Beweis. Betrachte die Spalten von E_n und B ,

$$E_n = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n), \quad B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n).$$

Die Umformung in (9.25) entspricht dann der gleichzeitigen Umformung

$$(A|\vec{e}_j) \Leftrightarrow (E_n|\vec{b}_j)$$

für jedes $j = 1, \dots, n$. Dies sind die erweiterten Koeffizientenmatrizen von Gleichungssystemen:

$$(A|\vec{e}_j) \leftrightarrow A\vec{x} = \vec{e}_j, \quad (E_n|\vec{b}_j) \leftrightarrow E_n\vec{x} = \vec{b}_j.$$

Es gilt damit

$$A\vec{x} = \vec{e}_j \Leftrightarrow E_n\vec{x} = \vec{b}_j \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{b}_j$$

also $A\vec{b}_j = \vec{e}_j$. Damit ist

$$AB = (A\vec{b}_1, \dots, A\vec{b}_n) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = E_n.$$

Somit ist A nach Satz 9.6.4 invertierbar und $B = A^{-1}$. □

Beachte: Bei der Umformung von $(A|E_n)$ links auf die Einheitsmatrix beginnt man zunächst mit dem Gaußalgorithmus, um links eine obere Dreiecksmatrix zu erhalten. Geht dies ohne eine Nullzeile auf der linken Seite, so kann man durch weitere Umformungen – ähnlich wie beim Gaußalgorithmus, aber jetzt von unten nach oben – auch die Zahlen über der Diagonalen zu Null machen, und die Diagonaleinträge zu Eins.

Entsteht dagegen eine Nullzeile, so ist die Umformung auf Einheitsmatrix nicht möglich und A ist nicht invertierbar.

Tatsächlich ist A nach Satz 9.6.4 genau dann invertierbar, wenn $A\vec{x} = \vec{0}$ eine eindeutige Lösung, d.h. wenn bei der Lösung keine freien Parameter entstehen, d.h. wenn der Rang gleich n ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn in der Zeilen-Stufenform keine Nullzeile entsteht. Also ist A invertierbar genau dann, wenn bei der Umformung keine Nullzeile entsteht.

Beispiel 9.7.2 Wir wollen die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

berechnen (und dabei gleichzeitig ermitteln, ob A überhaupt invertierbar ist). Wir bilden also $(A|E_n)$ und formen links auf Einheitsmatrix um:

$$\begin{aligned} (A|E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -I \\ +I \end{array} \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) -II \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -III \\ +III \end{array} \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Nach dem zweiten Schritt haben wir links die obere Dreiecksmatrix erreicht. Dann haben wir die dritte Zeile benutzt, um in der dritten Spalte darüber Nullen zu erzeugen. Dasselbe hätten wir dann auch mit der zweiten Zeile und der zweiten Spalte getan, aber in der zweiten Spalte stand in der ersten Zeile schon die Null. Daher haben wir im letzten Schritt nur noch durch Multiplikation auf der Diagonale links oben eine Eins erzeugt.

Da die Umformung auf Einheitsmatrix möglich war (wir also keine Nullzeile erhalten haben), ist A invertierbar und die Inverse ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um zu sehen, dass dies wirklich die Inverse ist, kann man jetzt noch die Probe machen, also nachrechnen, dass $AA^{-1} = E$ und $A^{-1}A = E$ gilt. Wir überlassen die Rechnung dem Leser.

In speziellen Fällen kann man die Inverse auch direkt über Formeln berechnen:

Satz 9.7.3 (A^{-1} in Spezialfällen)

(a) Für eine 2×2 -Matrix gilt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (9.26)$$

falls $ad - bc \neq 0$.

(b) Für eine Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}$$

gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$$

falls alle $d_i \neq 0$.

Beweis. Man prüft wieder nach, dass die angegebene Inverse die Gleichung $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ erfüllt. Im Fall (a) ist das

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

und Division durch $ad - bc$ ergibt dann die Einheitsmatrix. Im Fall (b) sieht man sofort, dass $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. \square

9.8 Elementarmatrizen

Es ist möglich, elementare Zeilenumformungen einer Matrix (siehe Abschnitt 6.2) durch Multiplikation der Matrix mit speziellen anderen Matrizen zu erzeugen. Das beruht auf den Überlegungen von Seite 124, Punkt 3 und 4, speziell den Gleichungen (9.20) und (9.21), wo wir gesehen haben, dass die Zeilen eines Matrixprodukts AB Linearkombinationen der Zeilen der rechten Matrix B sind.

Jeden der drei Typen von Zeilenumformungen aus Abschnitt 6.2 werden wir jetzt durch solche Linearkombinationen darstellen, was dann der Multiplikation mit einer zugehörigen *Elementarmatrix* F von links entspricht. Wir notieren dazu die Ausgangsmatrix A , an der wir die Zeilenumformung durchführen wollen, mit ihren Zeilenvektoren:

$$A = \begin{pmatrix} z_1^\top \\ \vdots \\ z_n^\top \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

(Zur Vereinfachung der Schreibweise lassen wir die Vektorpfeile auf den Zeilen(vektoren) z_i^\top weg.)

Typ I: Addition eines Vielfachen der j . Zeile zur i . Zeile.

Bei dieser Umformung wird die i . Zeile z_i^\top durch $z_i^\top + \alpha z_j^\top$ ersetzt, kurz

$$i. \text{ Zeile: } z_i^\top \rightarrow z_i^\top + \alpha z_j^\top.$$

Dies wird durch Multiplikation mit der Elementarmatrix

$$F_{ij}^I(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & \dots & \alpha & \dots & 0 & 1 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \leftarrow i. \text{ Zeile} \quad (9.27)$$

erreicht. Dabei steht die Zahl α in der i . Zeile und j . Spalte von $F_{ij}^I(\alpha)$, auf der Diagonale stehen Einsen und der Rest der Matrix ist Null. Mit den Regeln von (9.20) und (9.21) gilt dann

$$F_{ij}^I(\alpha)A = \begin{pmatrix} z_1^\top \\ \vdots \\ z_i^\top + \alpha z_j^\top \\ \vdots \\ z_n^\top \end{pmatrix}_{n \times n} \leftarrow i. \text{ Zeile,}$$

also genau die gewünschte Zeilenumformung.

Typ II: Multiplikation der i . Zeile mit einer Zahl $\alpha \neq 0$,

$$i. \text{ Zeile: } z_i^\top \rightarrow \alpha z_i^\top.$$

Diese Umformung wird erzeugt durch Multiplikation von links mit der Elementarmatrix

$$F_i^{\text{II}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \quad \leftarrow i. \text{ Zeile.} \quad (9.28)$$

Typ III: Vertauschen von i . und j . Zeile,

$$z_i^\top \leftrightarrow z_j^\top.$$

Die zugehörige Elementarmatrix ist hier

$$F_{ij}^{\text{III}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \dots & 1 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \quad \begin{array}{l} \leftarrow i. \text{ Zeile} \\ \leftarrow j. \text{ Zeile} \end{array} \quad (9.29)$$

Alle Elementarmatrizen sind invertierbar. Das liegt daran, dass die elementaren Zeilenumformungen Äquivalenzumformung sind, die durch Zeilenumformungen des gleichen Typs wieder umgekehrt werden können, was wiederum durch Multiplikation mit den entsprechenden Elementarmatrizen dargestellt werden kann. Die Inversen der Elementarmatrizen sind damit wieder Elementarmatrizen:

$$F_{ij}^{\text{I}}(\alpha)^{-1} = F_{ij}^{\text{I}}(-\alpha) \quad (9.30)$$

$$F_i^{\text{II}}(\alpha)^{-1} = F_i^{\text{II}}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad (9.31)$$

$$(F_{ij}^{\text{III}})^{-1} = F_{ij}^{\text{III}} \quad (9.32)$$

Zum Beispiel kann die Addition von αz_j^\top zur i . Zeile rückgängig gemacht werden durch Addition von $-\alpha z_j^\top$ zur i . Zeile; das ergibt (9.30). (9.32) sagt, dass das Vertauschen der i . mit der j . Zeile rückgängig gemacht wird durch erneutes Vertauschen der i . und j . Zeile.

Im Abschnitt zur Berechnung der inversen Matrix haben wir gesehen, dass jede invertierbare Matrix A durch Zeilenumformungen auf die Einheitsmatrix E umgeformt werden kann (Satz 9.7.1). Da jede Zeilenumformung von A der Multiplikation von links mit einer Elementarmatrix entspricht, gilt also

$$F_m \dots F_1 A = E$$

mit Elementarmatrizen F_1, \dots, F_m . (F_1 entspricht der ersten Umformung, F_m der letzten Umformung.) Wegen der Invertierbarkeit der Elementarmatrizen folgt

$$A = F_1^{-1} \dots F_m^{-1},$$

d.h. A ist ein Produkt von Elementarmatrizen. Wir halten dieses Ergebnis noch als Satz fest:

Satz 9.8.1 *Jede invertierbare Matrix ist ein Produkt von Elementarmatrizen.*

Kapitel 10

Determinanten

Die Determinante ist eine Zahl, die jeder quadratischen Matrix zugeordnet wird. Sie hat viele Anwendung. Zum Beispiel gibt es ein einfaches Determinantenkriterium für die Invertierbarkeit einer Matrix.

Hinweis: In den alten Mathematik A&B Skripten finden sie den Stoff dieses Kapitels im Skript Mathematik A, Kapitel 7.

10.1 Zweireihige Determinanten

Wir beginnen mit Determinanten für 2×2 -Matrizen, die man auch zweireihige Determinanten nennt.

Definition 10.1.1 Die Determinante der 2×2 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist die Zahl

$$\det A = ad - bc. \quad (10.1)$$

Wir können sofort zwei einfache *Anwendungen* der 2×2 -Determinante angeben:

- (a) Die 2×2 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

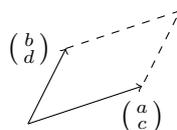
ist invertierbar, wenn $\det A \neq 0$. Ihre Inverse ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(siehe Satz 9.7.3)

- (b) Mit der 2×2 -Determinante kann man den Flächeninhalt eines Parallelogramms in \mathbb{R}^2 berechnen. Wir betrachten das Parallelogramm, das von den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ aufgespannt wird, also von den Spalten von

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$



Wir können die beiden Vektoren als Vektoren \vec{v}, \vec{w} im Raum auffassen,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} b \\ d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nach (7.37) ist die Fläche des Parallelogramms gleich dem Betrag des Vektorprodukts $\vec{v} \times \vec{w}$. Für das Vektorprodukt berechnen wir

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ad - bc \end{pmatrix},$$

und damit ist

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |ad - bc| = |\det A| = \text{Fläche Parallelogramm}.$$

10.2 n -reihige Determinanten

Die Berechnung der allgemeinen n -reihigen Determinante, also der Determinante einer $n \times n$ -Matrix, erfolgt nach dem *Laplaceschem Entwicklungssatz*¹:

Definition 10.2.1 (Laplacescher Entwicklungssatz) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine $n \times n$ -Matrix. Sei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die aus A durch Streichen der i . Zeile und j . Spalte entsteht. Dann gilt

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad (\text{Entwicklung nach } j. \text{ Spalte}) \quad (10.2)$$

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad (\text{Entwicklung nach } i. \text{ Zeile}) \quad (10.3)$$

Durch den Entwicklungssatz wird also die Berechnung der $n \times n$ -Determinante $\det A$ zurückgeführt auf die Berechnung der kleineren $(n-1) \times (n-1)$ -Determinanten $\det A_{ij}$. Es handelt sich damit um eine *rekursive Definition*²: Die $(n-1) \times (n-1)$ -Determinanten $\det A_{ij}$ können erneut mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz durch Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte berechnet werden, wobei dann $(n-2) \times (n-2)$ -Determinanten entstehen, die berechnet werden müssen, wieder mit dem Entwicklungssatz. Man wendet den Entwicklungssatz solange an, bis man zu 2×2 -Determinanten gelangt, die man mit Formel (10.1) ausrechnen kann.

¹Wir verwenden den Laplaceschen Entwicklungssatz hier als Definition – so ergibt sich eine einfachere Darstellung. Aus mathematischer Sicht ist das aber nicht ganz sauber. Eigentlich würde man die Determinante über die Entwicklung nach der ersten Spalte (z.B.) definieren, und dann den Entwicklungssatz für beliebige Spalten und Zeilen beweisen.

²Rekursive Definitionen sind Thema in Mathematik B.

Bemerkung: In den Entwicklungsformeln kommt das *Summenzeichen* \sum vor. Es ist eine Abkürzung für eine Summe mit mehreren Termen, die man sonst durch Punkte andeuten würde. Zum Beispiel kann man das Skalarprodukt

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

mit dem Summenzeichen als

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

schreiben. Das Summenzeichen bedeutet hier also, dass die Produkte $x_i y_i$ nacheinander addiert werden, und zwar von $i = 1$ bis $i = n$. Der Anfangswert für den Summationsindex $i = 1$ steht also unter dem Summenzeichen, der Endwert n steht darüber.

Beachte: Die Entwicklungsformeln (10.2) und (10.3) enthalten die Ausdrücke $(-1)^{i+j}$, die ein abwechselndes Vorzeichen ergeben, $+1$ wenn $i + j$ gerade ist, -1 wenn $i + j$ ungerade ist. Diese Vorzeichen bilden ein Schachbrettmuster, wenn man sie in Matrixform aufschreibt ($(-1)^{i+j}$ steht in der i . Zeile und j . Spalte):

$$\begin{matrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{matrix}$$

Beispiel 10.2.2 (a) Als erstes Beispiel schreiben wir die Laplace Entwicklung nach der 1. Spalte allgemein auf. Aus (10.2) mit $j = 1$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} \\ &= a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det A_{n1} \end{aligned}$$

Es werden also nacheinander die Einträge a_{11}, \dots, a_{n1} der ersten Spalte jeweils mit den Determinanten $\det A_{i1}$ multipliziert, wo also die erste Spalte und die dem Eintrag a_{i1} entsprechende i . Zeile gestrichen wurde. Die abwechselnden Vorzeichen stammen aus der 1. Spalte des Schachbrettmusters. Die Entwicklung nach der 1. Spalte erfolgt also nach folgendem *Schema*:

$$\det A = \begin{array}{|c|} \hline a_{11} \\ \hline \det A_{11} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline a_{21} \\ \hline \det A_{21} \\ \hline \end{array} + \dots + (-1)^{n+1} \begin{array}{|c|} \hline a_{n1} \\ \hline \det A_{n1} \\ \hline \end{array}$$

Im Schema ist angedeutet, wie im ersten Summanden bei a_{11} die erste Spalte und erste Zeile gestrichen wird, und a_{11} dann mit der Determinante dieser Restmatrix A_{11} multipliziert wird. Für a_{21} wird entsprechend die erste Spalte und zweite Zeile gestrichen, und so weiter. Es wird also immer die dem Eintrag a_{ij} entsprechende Zeile und Spalte gestrichen.

(b) Jetzt wollen wir

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

durch Entwicklung nach der 2. Zeile berechnen. Wir gehen also die Einträge der zweiten Zeile durch (4, 5, 6), und multiplizieren mit den Determinanten, wo die zweite Zeile und die dem Eintrag entsprechende Spalte gestrichen wurde. Die Vorzeichen stammen aus der zweiten Zeile des Schachbrettmusters:

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

Damit ist also

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = -4 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} - 6 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Die 2×2 -Determinanten kann man jetzt mit (10.1) berechnen.

10.3 Dreireihige Determinanten

Wir leiten jetzt eine allgemeine Formel zur Berechnung der Determinante einer 3×3 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

her. Dazu entwickeln wir die Determinante nach der 1. Spalte und benutzen (10.1) für die entstehenden 2×2 -Determinanten:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

Das ist die Formel, die wir schon im Abschnitt 7.12 zum Spatprodukt kennengelernt haben. Es ist die *Regel von Sarrus* mit dem *Schema*

$$\begin{array}{ccccccc} & + & + & + & & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & a_{11} & a_{12} & \\ & \diagdown & \times & \times & \times & \diagup & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & a_{21} & a_{22} & \\ & \diagup & \times & \times & \times & \diagdown & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & a_{31} & a_{32} & \\ & - & - & - & & & \end{array}$$

Es werden also die beiden ersten Spalten der Matrix nochmal links daneben geschrieben, dann die Produkte entlang der Diagonalen gebildet und schließlich addiert (blaue Diagonalen) bzw. subtrahiert (rote Diagonalen).

Achtung!

Die Regel von Sarrus kann nur bei 3×3 -Determinanten angewandt werden. Für alle anderen Größen liefert das Schema falsche Werte für $\det A$.

Die *geometrisch* Bedeutung der dreireihigen Determinante erhalten wir aus dem Spatprodukt aus Abschnitt 7.12. Denn nach (7.39) ist die 3×3 -Determinante gleich dem Spatprodukt aus den Spaltenvektoren der Matrix, also

$$\det A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3$$

wobei \vec{a}_i die Spalten von A sind, $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)_{3 \times 3}$. Damit übertragen sich unsere Ergebnisse vom Spatprodukt auf die 3×3 -Determinante:

$$|\det A| = \text{Volumen des von } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \text{ aufgespannten Spats} \quad (10.4)$$

und

$$\begin{aligned} \det A > 0 & \quad \text{falls } (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \text{ rechtshändig orientiert,} \\ \det A < 0 & \quad \text{falls } (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \text{ linkshändig orientiert.} \end{aligned} \quad (10.5)$$

10.4 Eigenschaften und Berechnung der Determinante

Mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz haben wir schon eine Möglichkeit zur Berechnung von Determinanten. In der Praxis ist diese rekursive Berechnung für die meisten Matrizen aber zu umständlich. Wir werden daher in diesem Abschnitt verschiedene Regeln kennenlernen, mit denen man Determinanten einfacher und effizienter berechnen kann.

Zunächst einige allgemeine Bemerkungen:

Bemerkung:

- (a) Für die Determinante von A schreibt statt $\det A$ manchmal auch $|A|$.
- (b) Auch für 1×1 -Matrizen ist eine Determinante definiert: Es gilt

$$A = (a_{11})_{1 \times 1} \quad \Rightarrow \quad \det A = a_{11}.$$

Man kann dann die Berechnung der 2×2 -Determinante mit der Laplaceschen Entwicklungsformel auf den 1×1 -Fall zurückführen und erhält daraus genau die Formel (10.1) für 2×2 -Determinanten.

- (c) Führt man die rekursive Definition der Determinante durch Laplacesche Entwicklung für eine allgemeine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ komplett durch (also z.B. wiederholte Entwicklung nach der 1. Spalte bis zu 2×2 -Determinanten), so erhält man die *Formel von Leibniz*:

$$\det A = \sum_{p=(i_1, \dots, i_n)} (-1)^{\varepsilon(p)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \quad (10.6)$$

Es wird hier die Summe über alle *Permutationen*³ p von $(1, \dots, n)$ gebildet. $\varepsilon(p)$ ist die Anzahl von Vertauschungen zweier Zahlen um von $(1, \dots, n)$ zur Permutation p zu kommen. Da es $n!$ verschiedene Permutationen der Zahlen $1, \dots, n$ gibt, besteht die Summe also aus $n!$ Summanden! Für große Matrizen (d.h. n groß) ist die Formel von Leibniz deshalb völlig ungeeignet für die praktische Berechnung der Determinante – die Rechenzeit wäre viel zu groß.

Aus theoretischer Sicht ist die Formel aber von Bedeutung: Sie zeigt zum Beispiel, dass die Determinante immer die Summe von Produkten aus n Einträgen der Matrix ist. In jedem der Produkte kommt dabei aus jeder Spalte und auch aus jeder Zeile nur genau ein Eintrag vor.

Für obere Dreiecksmatrizen lässt sich die Determinante sehr schnell berechnen: sie ist das Produkt der Diagonaleinträge:

Satz 10.4.1 *Für eine obere Dreiecksmatrix gilt*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}. \quad (10.7)$$

Speziell ist die Determinante der Einheitsmatrix

$$\det E = \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1. \quad (10.8)$$

Beweis. Durch wiederholte Entwicklung nach der 1. Spalte erhält man

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{denn } a_{21} = \dots = a_{n1} = 0) \\ &= a_{11}a_{22} \det \begin{pmatrix} a_{33} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \dots = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}. \end{aligned}$$

Da in der ersten Spalte bei jeder Matrix nur die oberste Zahl ungleich Null ist, ergibt die Entwicklung (10.2) nach der 1. Spalte immer nur den einen Term, bei dem in der Determinante die erste Spalte und erste Zeile gestrichen wird. Man beachte außerdem, dass sich aus dem Schachbrettmuster immer ein + ergibt (Eintrag links oben). \square

³Eine Permutation ist eine Anordnung von Zahlen (oder Objekten) in einer Reihenfolge. Z.B. sind $(1, 4, 3, 2)$ und $(2, 1, 4, 3)$ zwei verschiedene Permutationen der Zahlen $1, 2, 3, 4$.

Beispiel 10.4.2 Folgende Matrix ist eine obere Dreiecksmatrix. Damit können wir ihre Determinante mit (10.7) berechnen:

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 9 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot (-1) = 42$$

Der nächste Satz und seine Folgerung zeigen uns, wie sich die Determinante unter Zeilen- und Spaltenumformungen der Matrix ändert (bzw. in einem Fall nicht ändert).

Satz 10.4.3 Die Determinante ist linear und alternierend in den Zeilen und Spalten:

(a) Die Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.9)$$

und

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (10.10)$$

für jedes $i = 1, \dots, n$. Genauso ist die Determinante linear in jeder Spalte, d.h. es gelten die analogen Formeln für die Spalten.

(b) Die Determinante ist alternierend in Zeilen und Spalten. D.h. vertauscht man in der Matrix A zwei Zeilen oder zwei Spalten und bezeichnet die neue Matrix mit \tilde{A} , so gilt

$$\det \tilde{A} = -\det A.$$

Beweis. Die Aussagen zeigt man durch fortgesetzte Entwicklung nach der 1. Spalte oder Zeile und vollständige Induktion⁴. Wir übergehen die Details. \square

⁴Vollständige Induktion ist ein mathematisches Beweisverfahren und wird in Mathematik B besprochen.

Folgerung 10.4.4

- (a) Enthält A zwei gleiche Zeilen oder eine 0-Zeile, dann ist $\det A = 0$.
- (b) $\det A$ bleibt gleich bei Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Beide Aussagen gelten genauso für Spalten.

Beweis. Seien z_1, \dots, z_n die Zeilen von A , also

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Die z_i sind also Zeilenvektoren. (Zur Vereinfachung schreiben wir hier z_i statt \vec{z}_i^T .) Nehmen wir zuerst an, dass $z_i = z_j$ gilt. Vertauschen wir die i . und j . Zeile in der Determinante, so ändert sich nach Satz 10.4.3 das Vorzeichen. Wegen $z_i = z_j$ haben wir aber nach dem Vertauschen wieder dieselbe Matrix wie am Anfang:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \end{pmatrix} = -\det A.$$

Es gilt also $\det A = -\det A$, das geht aber nur wenn $\det A = 0$. Sei jetzt die i . Zeile komplett Null, also $z_i = (0, \dots, 0)$. Es gilt dann $z_i = 0z_i$ und aus (10.10) folgt

$$\det A = \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ 0z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots \\ z_i \\ \vdots \end{pmatrix} = 0.$$

Damit haben wir (a) gezeigt.

Jetzt zu (b): Wir betrachten die Determinante der Matrix, bei der wir zur i . Zeile ein Vielfaches der j . Zeile addiert haben, also $z_i \rightarrow z_i + \alpha z_j$. Aus der Linearität der Determinante in der i . Zeile ergibt sich dann

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ z_i + \alpha z_j \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \underbrace{\alpha \det \begin{pmatrix} \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \end{pmatrix}}_0 = \det A.$$

Die zweite Determinante in der Summe ist Null nach Teil (a), weil in ihr die i . und j . Zeile gleich sind. \square

Beachte: (10.10) besagt, dass ein gemeinsamer Faktor λ einer Zeile vor die Determinante gezogen werden kann. Man kann die Gleichung aber auch so umformen:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (10.11)$$

Das heißt: multipliziert man in der Determinante eine Zeile mit einer Zahl λ , so muss man die neue Determinante durch λ teilen, also mit $\frac{1}{\lambda}$ multiplizieren, um Gleichheit zu erhalten! (Dasselbe gilt wieder für Multiplikation einer Spalte.)

Der letzte Satz und die Folgerung ermöglichen es, durch Zeilen- und Spaltenumformungen eine Determinante auf obere Dreiecksform zu bringen. Dann kann sie einfach berechnet werden. (Produkt der Diagonaleinträge, Satz 10.4.1)

Beispiel 10.4.5 Wir berechnen folgende Determinante durch schrittweise Umformung auf obere Dreiecksmatrix:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 3I \\ &= 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -2 \cdot (1 \cdot (-4) \cdot 2 \cdot 1) = -2 \cdot (-8) = 16 \end{aligned}$$

Im ersten Schritt wurde der Faktor 2 aus der ersten Zeile vor die Determinante gezogen (bzw. die erste Zeile durch 2 geteilt, vergleiche (10.11)). Im dritten Schritt wurden 3. und 4. Zeile vertauscht, was zu dem Minuszeichen vor der Determinante führt. Der letzte Schritt ist dann die Berechnung der Determinante für die entstandene obere Dreiecksmatrix.

Bemerkung: Oft ist eine komplette Umformung auf obere Dreiecksform nicht nötig, um die Determinante effizient berechnen zu können. Man kann stattdessen versuchen, durch Zeilen- oder Spaltenformung in einer bestimmten Spalte oder Zeile möglichst viele Nullen zu erzeugen. Entwickelt man dann nach dieser Spalte bzw. Zeile, so fällt für jeden Nulleintrag die zugehörige $(n-1) \times (n-1)$ -Determinante $\det A_{ij}$ in der Entwicklungsformel weg, siehe (10.2) und (10.3).

Im besten Fall ist nur ein Eintrag der Spalte oder Zeile ungleich Null, sodass nur eine $(n-1) \times (n-1)$ -Determinante stehen bleibt. Zum Beispiel ist für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

durch Entwicklung nach der dritten Zeile

$$\det A = -(-9) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(Beachte das zusätzliche Minuszeichen nach der Schachbrettregel!) Die verbleibende 3×3 -Determinante kann nun mit der Sarrus-Regel berechnet werden.

Wir kommen nun zu einigen weiteren Rechenregeln für die Determinante:

Satz 10.4.6 Für $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

- (a) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
- (b) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- (c) $\det A = \det A^\top$
- (d) $\det(A^k) = (\det A)^k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$
- (e) A invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$. In diesem Fall gilt

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Beweis.

- (a) Seien wieder z_1, \dots, z_n die Zeilen von A . Damit ist dann

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \vdots \\ \lambda z_n \end{pmatrix}.$$

In $\det(\lambda A)$ kann dann aus jeder Zeile ein Faktor λ vor die Determinante gezogen werden (Linearität in den Zeilen, (10.10)):

$$\det \lambda A = \lambda \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \lambda z_2 \\ \lambda z_3 \\ \vdots \\ \lambda z_n \end{pmatrix} = \lambda^2 \det \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \lambda z_3 \\ \vdots \\ \lambda z_n \end{pmatrix} = \dots = \lambda^n \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda^n \det A$$

- (e1) Durch elementare Zeilenumformungen kann A auf obere Dreiecksform \tilde{A} gebracht werden (Gaußalgorithmus):

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Nach Satz 9.6.4 ist A invertierbar genau dann, wenn $\text{Kern } A = \{0\}$, d.h. wenn die Lösung von $A\vec{x} = \vec{0}$ keine freien Parameter enthält, d.h. wenn der Rang n ist. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn alle $\tilde{a}_{ii} \neq 0$; denn sonst hätte man eine Nullzeile in \tilde{A} , oder könnte sie durch weitere Zeilenumformungen erzeugen. Wegen Satz 10.4.1 folgt

$$\text{alle } \tilde{a}_{ii} \neq 0 \Leftrightarrow \det \tilde{A} \neq 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0.$$

Die letzte Äquivalenz gilt, da nach Satz 10.4.3 und Folgerung 10.4.4 bei Zeilenumformungen die Determinante entweder gleich bleibt, oder mit einer Zahl $\neq 0$ multipliziert wird, oder ihr Vorzeichen ändert. Die Determinante kann damit durch Zeilenumformungen nicht zu Null werden, wenn sie vorher ungleich Null war. Zusammengefasst ist somit A invertierbar genau dann wenn $\det A \neq 0$.

- (b) Wir zeigen zunächst, dass (b) für den Fall gilt, dass A eine Elementarmatrix ist (siehe Abschnitt 9.8).

1. $A = F^{\text{I}}$ Elementarmatrix Typ I: Da die Multiplikation von links mit F^{I} die Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen bewirkt, gilt (Folgerung 10.4.4)

$$\det(F^{\text{I}}B) = \det B$$

für jede Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Speziell ist $\det F^{\text{I}} = \det E = 1$ (wähle $B = E$). Damit folgt

$$\det(F^{\text{I}}B) = 1 \cdot \det B = \det F^{\text{I}} \cdot \det B.$$

2. $A = F^{\text{II}}(\alpha)$ Typ II: Nach (10.10) ist

$$\det(F^{\text{II}}(\alpha)B) = \alpha \det B,$$

speziell $\det F^{\text{II}}(\alpha) = \alpha$. Also folgt

$$\det(F^{\text{II}}(\alpha)B) = \alpha \det B = \det F^{\text{II}}(\alpha) \cdot \det B.$$

3. $A = F^{\text{III}}$ Typ III: Hier gilt (nach Satz 10.4.3):

$$\begin{aligned} \det(F^{\text{III}}B) &= -\det B, \quad \det F^{\text{III}} = -1 \\ \Rightarrow \det(F^{\text{III}}B) &= \det F^{\text{III}} \cdot \det B. \end{aligned}$$

Sei nun A eine beliebige invertierbare $n \times n$ -Matrix. Nach Satz 9.8.1 ist A Produkt von Elementarmatrizen, $A = F_1 \dots F_m$. Da wir (b) für Elementarmatrizen gezeigt haben, gilt

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(F_1 \dots F_m B) = \det F_1 \cdot \det(F_2 \dots F_m B) = \dots \\ &= \det F_1 \cdot \dots \cdot \det F_m \cdot \det B. \end{aligned}$$

Speziell ($B = E$) gilt $\det A = \det F_1 \cdot \dots \cdot \det F_m$, und damit folgt dann

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Ist schließlich A nicht invertierbar, so ist auch AB nicht invertierbar. Denn nach Satz 9.6.4 gibt es dann ein $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$, für das $A\vec{x} = \vec{b}$ nicht lösbar ist, d.h. für alle \vec{x} gilt $A\vec{x} \neq \vec{b}$. Damit gilt auch $AB\vec{x} \neq \vec{b}$ für alle \vec{x} , und somit ist AB nicht invertierbar. Nach (e1) ist dann

$$\det A = \det(AB) = 0$$

und es folgt

$$\det(AB) = 0 \cdot \det B = \det A \cdot \det B.$$

- (c) Zunächst gilt $\det F = \det F^\top$ für jede Elementarmatrix F . Denn für eine Elementarmatrix vom Typ I ist F^\top wieder Elementarmatrix vom Typ I, und damit (siehe oben) $\det F = 1 = \det F^\top$. Ist F vom Typ II oder III, so ist schon $F = F^\top$.

Sei nun wieder A invertierbar, also $A = F_1 \dots F_m$ Produkt von Elementarmatrizen. Dann gilt $A^\top = F_m^\top \dots F_1^\top$ und somit

$$\det A \stackrel{(b)}{=} \det F_1 \cdot \dots \cdot \det F_m = \det F_m^\top \cdot \dots \cdot \det F_1^\top \stackrel{(b)}{=} \det A^\top.$$

Ist A nicht invertierbar, dann auch A^\top nicht invertierbar (siehe Satz 9.6.2) und es folgt $\det A = 0 = \det A^\top$.

- (d) Aus (b) folgt sofort

$$\det(A^k) = \det(\underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ mal}}) = \det A \cdot \dots \cdot \det A = (\det A)^k.$$

- (e2) Ist A invertierbar, so gilt $AA^{-1} = E$ und mit (b) folgt

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1 \quad \Rightarrow \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

□

Bemerkung:

- Eine quadratische Matrix A mit $\det A \neq 0$ heißt *regulär*, sonst *singulär*. Es sind also genau die regulären Matrizen invertierbar, die singulären nicht invertierbar.
- Wie bei oberen ist auch bei *unteren Dreiecksmatrizen* die Determinante gleich dem Produkt der Diagonaleinträge:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Dies folgt (zum Beispiel) aus $\det A^\top = \det A$ und der Formel (10.7) für obere Dreiecksmatrizen.

Achtung!

$\det(\lambda A)$ ist *nicht* gleich $\lambda \cdot \det A$, sondern es gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ bei $n \times n$ -Matrizen. Außerdem gibt es für $\det(A + B)$ keine Formel!

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist eine *Blockdreiecksmatrix*, wenn sie die Form

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \begin{array}{l} k \text{ Zeilen} \\ \\ \\ k \text{ Spalten} \end{array} \quad (10.12)$$

hat. Die Matrix A kann also so in Blöcke eingeteilt werden, dass unten links eine Nullmatrix steht. Dabei müssen die Diagonalblöcke B und D quadratisch sein, d.h. in A werden die ersten k Zeilen und k Spalten von den restlichen $n - k$ Zeilen und Spalten getrennt. Damit ist dann $B \in \mathbb{K}^{k \times k}$, $C \in \mathbb{K}^{k \times (n-k)}$, $D \in \mathbb{K}^{(n-k) \times (n-k)}$ und die Nullmatrix hat die Größe $(n - k) \times k$.

Bei Blockdreiecksmatrizen ist die Determinante das Produkt der Determinanten der Diagonalblöcke:

Satz 10.4.7 Für eine Blockdreiecksmatrix A der Form (10.12) gilt

$$\det A = \det B \cdot \det D.$$

Beweis. Die Formel ist klar für den Fall, dass B, D obere Dreiecksmatrizen sind. Den allgemeinen Fall zeigt man mit Zeilenumformungen auf oberer Dreiecksform oder durch Entwicklung nach der 1. Spalte und vollständige Induktion. \square

Beispiel 10.4.8 Folgende Matrix ist eine Blockdreiecksmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 8 & 10 \\ 3 & -2 & 7 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Für ihre Determinante gilt damit

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 8 & 10 \\ 3 & -2 & 7 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 8 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

10.5 Anwendungen der Determinante

Zwei mögliche Anwendungen der Determinante sind die Lösung quadratischer Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$ mit der Cramer-Regel sowie die Berechnung der inversen Matrix. Daneben hat die Determinante aber noch viele andere „Anwendungen“, die Berechnung von Flächeninhalt (Parallelogramm) und Volumen (Spat) sowie Orientierung von Vektoren haben wir schon gesehen; andere folgen in späteren Kapiteln (lineare Unabhängigkeit) oder in Mathematik B (Eigenwerte, Definitheit).

Cramer-Regel

Satz 10.5.1 Sei $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)_{n \times n} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine invertierbare quadratische Matrix mit den Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, und sei $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt für die j . Komponente der Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$x_j = \frac{1}{\det A} \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{b}, \dots, \vec{a}_n).$$

Dabei steht der Vektor \vec{b} in der Determinante genau in der j . Spalte, d.h. es wird \vec{a}_j durch \vec{b} ersetzt.

Beweis. Wir schreiben das Matrix-Vektor-Produkt $A\vec{x}$ als Linearkombination der Spalten von A (vergleiche (9.19)):

$$\vec{b} = A\vec{x} = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n.$$

(Zur Schreiberleichterung lassen wir die Vektorpfeile wieder weg) Mit der Linearität der Determinante in der 1. Spalte folgt dann

$$\begin{aligned} & \det(b, a_2, \dots, a_n) \\ &= x_1 \det(a_1, a_2, \dots, a_n) + x_2 \underbrace{\det(a_2, a_2, \dots, a_n)}_0 + \dots + x_n \underbrace{\det(a_n, a_2, \dots, a_n)}_0 \\ &= x_1 \det A \end{aligned}$$

Die hinteren Determinanten sind Null, da jeweils zwei Spalten gleich sind. Teilt man nun durch $\det A$, so erhält man die Gleichung für x_1 . Die Gleichungen für x_2, \dots, x_n ergeben sich ebenso. \square

Beispiel 10.5.2 Wir berechnen die Komponenten der Lösung des Gleichungssystems

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\det A = -6 - 2 = -8$. Nach der Cramer-Regel folgt dann

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-8} \cdot (-2 - 6) = 1, \\ x_2 &= \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{-8} \cdot (18 - 2) = -\frac{16}{8} = -2. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Cramer-Regel ist für große Gleichungssysteme, also großes n (viel) aufwändiger als das Gaußverfahren. (Sowohl numerisch als auch für die Brechnung von Hand). Sie kann aber geeignet sein, um (bei kleinem n) nur eine oder wenige Komponenten x_j der Lösung zu berechnen.

Berechnung der inversen Matrix mittels Determinante

Die Inverse einer regulären Matrix $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ist gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* \quad (10.13)$$

wobei

$$A^* = ((-1)^{i+j} \det A_{ij})_{n \times n}^\top \quad (10.14)$$

die sogenannte „Adjunkte“ von A ist. A_{ij} ist hier wieder die Matrix, die aus A durch Streichen der i . Zeile und j . Spalte entsteht (siehe Abschnitt 10.2). Im Fall einer 3×3 -Matrix erhält man etwa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \det A_{31} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & -\det A_{32} \\ \det A_{13} & -\det A_{23} & \det A_{33} \end{pmatrix}$$

Im 2×2 -Fall ergibt sich aus (10.13) genau die Formel (9.26).

Wie schon bei der Cramer-Regel gilt auch hier: Für große n ist die Berechnung der kompletten Inversen A^{-1} über Determinanten viel zu aufwändig. Für die Berechnung einzelner Einträge von A^{-1} kann die Formel jedoch sinnvoll sein.

Die Formeln (10.13), (10.14) ergeben sich übrigens, indem man die Lösungen \vec{b}_j von $A\vec{b}_j = \vec{e}_j$ mit der Cramer-Regel berechnet; \vec{b}_j ist dann genau die j . Spalte von A^{-1} , siehe den Beweis von Satz 9.7.1.

Kapitel 11

Grenzwerte und Stetigkeit

Grenzwert und Stetigkeit sind die beiden grundlegenden Begriffe, auf denen die Untersuchung von Funktionen, die *Analysis*, aufbaut. So sind etwa Ableitung und Integral beide über Grenzwerte definiert.

Hinweis: In den alten Mathematik A&B Skripten finden sie den Stoff dieses Kapitels im Skript Mathematik A, Kapitel 2.3, 2.4.

11.1 Der Grenzwert einer Funktion

Wir beginnen mit einem einführenden Beispiel:

Beispiel 11.1.1 Wir betrachten die abschnittsweise definierte Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ -1, & x = 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

Ihr Graph ist in Abbildung 11.1 dargestellt. f hat in $x_0 = 1$ eine „Sprungstelle“. Man beachte, dass für $x_0 = 1$ weder $f(x) = x^2$ gilt noch $f(x) = x + 1$ (wegen den Bedingungen $x < 1$ bzw. $x > 1$ in der Definition von f). Vielmehr ist für $x_0 = 1$ der Funktionswert $f(1) = -1$ definiert. Im Graphen ist durch die kleinen nichtausgefüllten Kreise bei $x_0 = 1$ angedeutet, dass diese Punkte nicht mehr zum Parabelast bzw. dem Geradenstück gehören. Man kann ihnen aber beliebig nahe kommen:

Bei Annäherung von links an $x_0 = 1$, das heißt mit $x < 1$, ist $y = f(x) = x^2$, und dieser y -Wert nähert sich beliebig dicht an $y = 1$ an, wenn x immer näher von links an $x_0 = 1$ heran kommt. Entsprechend ist bei einer Annäherung von rechts an $x_0 = 1$, das heißt mit $x > 1$, der Funktionswert $y = f(x) = x + 1$, und dieser nähert sich beliebig dicht nah an $y = 2$ an, wenn x von rechts immer näher an $x_0 = 1$ heran kommt. Diese beiden Annäherungen sind aber ganz unabhängig vom tatsächlichen Wert von f bei x_0 , denn der ist $f(1) = -1$.

Dieses beliebig dichte Annähern einer Funktion bzw. eines Funktionsterms an einen bestimmten Wert nennt man einen Grenzwert:

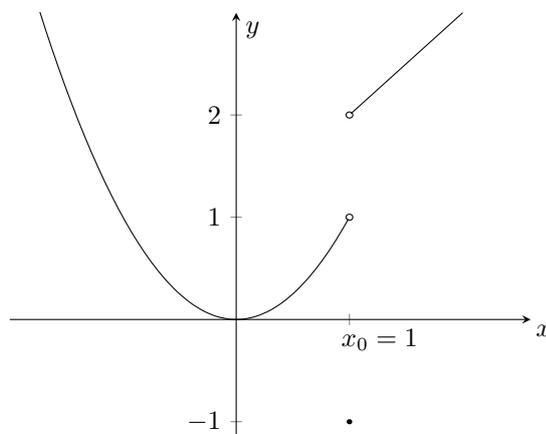


Abbildung 11.1: Zur Definition des Grenzwerts einer Funktion

Definition 11.1.2 Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ hat an der Stelle x_0 den *Grenzwert* y , wenn sich bei Annäherung von x an x_0 der Funktionswert $f(x)$ beliebig nah an y annähert. Man schreibt hierfür¹

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$$

oder auch

$$f(x) \rightarrow y \quad \text{bei} \quad x \rightarrow x_0.$$

Für $x \rightarrow x_0$ sagt man auch „ x konvergiert gegen x_0 “; entsprechend „ $f(x)$ konvergiert gegen y “ für $f(x) \rightarrow y$.

Beachte: Beim Grenzwert $x \rightarrow x_0$ werden nur die Werte $x \neq x_0$ betrachtet! (Siehe das einführende Beispiel.)

Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ist ein *beidseitiger* Grenzwert, d.h. bei $x \rightarrow x_0$ wird $x < x_0$ und $x > x_0$ zugelassen, die Annäherung wird also gleichzeitig von links *und* von rechts betrachtet. Im einführenden Beispiel 11.1.1 haben wir dagegen die Fälle, dass sich x von rechts oder von links an x_0 annähert, getrennt betrachtet. Das sind dann sogenannte *einseitige* Grenzwerte, für die man eine der folgenden Schreibweisen verwendet:

- rechtsseitiger Grenzwert (d.h. nur $x > x_0$ bei $x \rightarrow x_0$):

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

- linksseitiger Grenzwert (nur $x < x_0$):

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

¹Das Kürzel \lim steht für „limes“, das lateinische Wort für „Grenze“.

Zwischen den einseitigen und dem beidseitigen Grenzwert besteht folgende Beziehung:

Lemma 11.1.3 Die Funktion f hat in x_0 den (beidseitigen) Grenzwert y genau dann, wenn der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von f in x_0 beide gleich y sind. Formal:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = y = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$$

Sind dagegen die einseitigen Grenzwerte in x_0 verschieden, $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) \neq \lim_{x \searrow x_0} f(x)$, so hat die Funktion in x_0 keinen (beidseitigen) Grenzwert, d.h. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert nicht.

Im einführenden Beispiel 11.1.1 hatten wir die einseitigen Grenzwerte in $x_0 = 1$ betrachtet. Wir schreiben die entsprechenden Rechnungen jetzt nochmal formal auf: Für den linksseitigen Grenzwert (also bei $x < 1$) ist

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} x^2 = 1^2 = 1.$$

Wegen $x \nearrow 1$, also $x < 1$, gilt für die Funktionswerte $f(x) = x^2$ (nach der Definition von f); das haben wir in die Rechnung eingesetzt. Für $x \rightarrow 1$ nähert sich nun x^2 beliebig dicht an 1^2 , d.h. $x^2 \rightarrow 1^2$, und damit erhalten wir $1^2 = 1$ als Grenzwert.

Für den rechtsseitigen Grenzwert (also $x > 1$) ergibt sich entsprechend

$$\lim_{x \searrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} x + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Insbesondere ist hier $\lim_{x \nearrow 1} f(x) \neq \lim_{x \searrow 1} f(x)$ und damit existiert in diesem Beispiel der beidseitige Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ nicht.

Bemerkung: Unsere Definition des Grenzwerts in 11.1.2 ist anschaulich, aber nicht sehr exakt. (Was soll „beliebig nahe Annäherung“ genau heißen?) Wir geben daher jetzt noch die mathematisch exakte Definition des Grenzwerts an:

Definition 11.1.4 f hat in x_0 den Grenzwert y , wenn es zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

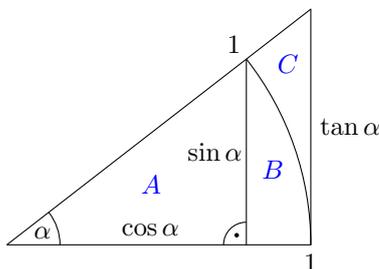
$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - y| < \varepsilon \quad \text{für } x \in D \setminus \{x_0\}.$$

Das bedeutet: Ist der Abstand von x zu x_0 , also $|x - x_0|$, hinreichend klein (nämlich kleiner als δ), dann ist auch der Abstand $|f(x) - y|$ von $f(x)$ zu y klein, nämlich kleiner als ε .

11.2 Rechenregeln für Grenzwerte

Satz 11.2.1 (a) Gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = u$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = w$, dann gilt auch

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) &= u \pm w \\ \lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) &= cu && \text{(für } c \in \mathbb{R}) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) &= uw \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{u}{w} && \text{falls } w \neq 0 \end{aligned}$$

Abbildung 11.2: Figur zur Berechnung des Grenzwerts $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

(b) Gilt $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ und ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x),$$

dann ist auch

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y.$$

Alle Regeln gelten genauso für einseitige Grenzwerte.

(Alle Regeln sind anschaulich klar, wir verzichten daher hier auf einen Beweis.)

Mit den obigen Regeln ist es möglich, aus schon bekannten Grenzwerten, neue zu bestimmen. Wir zeigen das hier an einem Beispiel:

Beispiel 11.2.2 Wir wollen den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

bestimmen. Man beachte zunächst, dass wir die Regel $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u}{w}$ nicht anwenden können, da $w = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ist, oder – anders gesagt – wir im Grenzwert $\frac{0}{0}$ erhalten würden, was nicht definiert ist. Um den Grenzwert doch zu berechnen, verwenden wir nun eine geometrische Überlegung und dann 11.2.1(b).² Wir betrachten die Figur in Abbildung 11.2: Es sind zwei ineinander liegende rechtwinklige Dreiecke mit dem Winkel α . Das innere Dreieck hat eine Hypotenuse der Länge 1 und die Katheten $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$. Das äußere Dreieck hat eine Ankathete mit Länge 1 und die Gegenkathete $\tan \alpha$. Zusätzlich betrachten wir noch den Kreissektor mit Radius 1, der aus dem äußeren Dreieck ausgeschnitten wird. Wir bestimmen nun die Flächeninhalte dieser drei Flächen. Es gilt

- inneres Dreieck: Fläche $A = \frac{1}{2} \cos \alpha \cdot \sin \alpha$
- Kreissektor: Fläche $A + B = \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha}{2}$
- äußeres Dreieck: Fläche $A + B + C = \frac{1}{2} \tan \alpha$

²Später lernen wir mit der Regel von l'Hospital eine andere Möglichkeit kennen, diesen Grenzwert zu berechnen.

Man beachte, dass wir bei der Formel für die Fläche des Kreissektors explizit den Winkel α in Bogenmaß benutzen. (Denn im Nenner steht 2π und nicht 360°)
Damit ist dann

$$\frac{1}{2} \cos \alpha \cdot \sin \alpha \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{2} \tan \alpha.$$

Aus der ersten Ungleichung folgt

$$\cos \alpha \sin \alpha \leq \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq \frac{1}{\cos \alpha},$$

aus der zweiten erhalten wir

$$\alpha \leq \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \cos \alpha \leq \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Damit folgt also

$$\cos \alpha \leq \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (11.1)$$

Hierauf können wir jetzt 11.2.1(b) anwenden: Die Grenzwerte für $\alpha \rightarrow 0$ des linken und rechten Terms sind

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos \alpha = \cos 0 = 1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{1} = 1.$$

Die Terme links und rechts in (11.1) konvergieren also beide gegen 1. Damit muss dann also auch der mittlere Term gegen 1 konvergieren,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

Somit ist also

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (11.2)$$

Dieses Ergebnis können wir jetzt benutzen, um andere Grenzwerte zu berechnen. Zum Beispiel ist, nach den Rechenregeln 11.2.1(a),

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{x} &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\cos x}_{\rightarrow 1} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

Wir haben hier den Bruch so zerlegt, dass wir bekannte Grenzwerte, speziell den von $\frac{\sin x}{x}$, benutzen können.

Bemerkung: Für das Ergebnis (11.2) ist wesentlich, dass für den Sinus der Winkel im Bogenmaß benutzt wird. Berechnet man zum Beispiel mit dem Taschenrechner den Ausdruck $\frac{\sin x}{x}$ für immer kleinere Werte von x (also $x \rightarrow 0$), so bekommt man nur dann Werte, die sich immer mehr an 1 annähern, wenn man den Sinus im Bogenmaß benutzt. Verwendet man dagegen für den Taschenrechner die Grad-Einstellung, so ergibt sich ein anderer Wert. (Probieren Sie es aus!)

11.3 Stetigkeit

Definition 11.3.1 Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig an der Stelle* $x_0 \in D$, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (11.3)$$

(Insbesondere muss der beidseitige Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existieren.)

Die Funktion heißt *stetig* (auf D), wenn f an jeder Stelle $x_0 \in D$ stetig ist.

Anschaulich bedeutet Stetigkeit, dass der Graph von f (bis auf Definitionslücken) keine Sprungstellen hat.

Beispiel 11.3.2 (a) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ 2x + 1, & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$$

Da an den beiden Stellen $x = 0$ und $x = 1$ unterschiedliche Funktionsterme zusammentreffen, sind dort möglicherweise Sprungstellen, d.h. f könnte dort nicht stetig sein. Um zu prüfen, ob f an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ist, berechnen wir zunächst dort die einseitigen Grenzwerte:

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \cos 0 = 1, \quad \lim_{x \searrow 0} f(x) = -2 \cdot 0 + 1 = 1.$$

Die einseitigen Grenzwerte sind gleich, also ist das auch der beidseitige Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

Da dies aber auch der Funktionswert in $x_0 = 0$ ist, also

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = \cos 0 = f(0),$$

folgt, dass f in $x_0 = 0$ stetig ist. Für die Stelle $x_0 = 1$ ist

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = -2 \cdot 1 + 1 = -1, \quad \lim_{x \searrow 1} f(x) = \sqrt{1} = 1.$$

Da die einseitigen Grenzwerte hier verschieden sind, existiert der beidseitige Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ nicht. Damit ist f in $x_0 = 1$ nicht stetig.

(b) Sei jetzt

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \neq 1 \\ \pi, & x = 1 \end{cases}$$

Hier ist

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} e^x = e^1 = e.$$

Der (beidseitige) Grenzwert existiert also, ist aber nicht gleich dem Funktionswert:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = e \neq f(1) = \pi.$$

Damit ist f in $x_0 = 1$ nicht stetig.

Beachte, dass bei $x \rightarrow 1$ immer $x \neq 1$ gilt und somit $f(x) = e^x$ bei der Berechnung des Grenzwert verwendet wird. Einseitige Grenzwerte sind hier nicht nötig, da für $x > 1$ und $x < 1$ der Funktionsterm der Gleiche ist.

In Bezug auf Stetigkeit gelten folgende Regeln:

Satz 11.3.3 (a) Sind $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann sind auch die Funktionen

- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- $(cf)(x) = cf(x) \quad (c \in \mathbb{R})$
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

alle stetig, dort wo sie definiert sind.

(b) Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ invertierbar und stetig, dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} stetig.

(c) Die Standardfunktionen

$$x^n, \sin, \cos, \tan, e^x, \arcsin, \arccos, \arctan, \ln, \sqrt[n]{x}$$

sind alle (auf ihren Definitionsbereichen) stetig.

Beispiel 11.3.4 Die Funktion

$$f(x) = \sqrt{\sin\left(\frac{x^2 - 2}{x - 1}\right) + \frac{1}{x}}$$

ist durch Addition, Division und Verkettung zusammengesetzt aus den Standardfunktionen. Daher ist f stetig auf ihrem Definitionsbereich.

11.4 Grenzwerte und Unendlich

Beim Grenzwert einer Funktion kann an zwei Stellen eine Konvergenz nach Unendlich auftreten: einmal bei den Funktionswerten $f(x)$, und einmal bei der Variablen x selbst. Auch der Fall „ $-\infty$ “ ist möglich.

(a) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \text{ wird beliebig groß wenn } x \rightarrow x_0.$$

Eine *mathematisch präzise Definition* dieses Grenzwerts wäre:

Zu jedem (noch so großen) $L > 0$ gibt es ein (kleines) $\delta > 0$ sodass gilt

$$|x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) > L$$

Analoges gilt bei einseitigen Grenzwerten $x \nearrow x_0$ und $x \searrow x_0$.

(b) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \rightarrow y \text{ wenn } x \text{ beliebig gro\ss{} wird.}$$

(c) Entsprechend sind die Grenzwerte

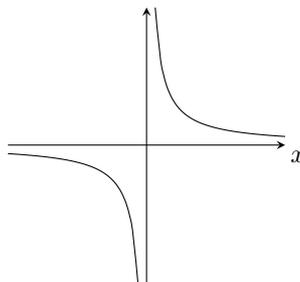
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y$$

erkl\u00e4rt.

Beispiel 11.4.1 (a) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Ihr Graph ist:

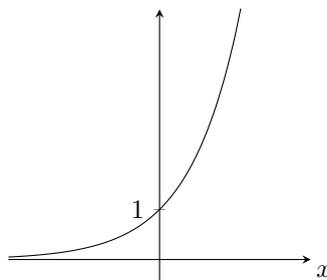


Am Graphen kann man folgende Grenzwerte ablesen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} &= \infty, & \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} &= 0, & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} &= 0 \end{aligned} \tag{11.4}$$

Die Grenzwerte kann man aber nat\u00fcrlich auch direkt aus dem Funktions-term $f(x) = \frac{1}{x}$ erhalten. Zum Beispiel wird bei $x \searrow 0$ der Nenner von $\frac{1}{x}$ beliebig klein (bleibt aber positiv), so dass der Bruch $\frac{1}{x}$ beliebig gro\u00df wird; es gilt also $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ f\u00fcr $x \searrow 0$. Bei $x \nearrow 0$ dagegen wird x vom Betrag her beliebig klein, ist aber negativ. Damit ist auch $\frac{1}{x}$ negativ und wird vom Betrag beliebig gro\u00df; somit ist $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ f\u00fcr $x \nearrow 0$.

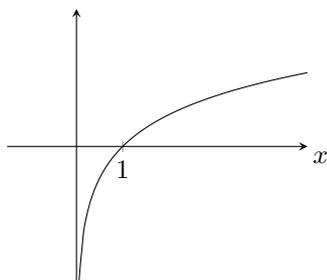
(b) Der Graph der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist



Für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$ erhalten wir die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad (11.5)$$

(c) Die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ hat den Graphen



Hier gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty, \quad \lim_{x \searrow 0} \ln x = -\infty. \quad (11.6)$$

Das der erste Grenzwert für $x \rightarrow \infty$ hier tatsächlich unendlich ist, ergibt sich übrigens durch Umkehrung des Grenzwerts der Exponentialfunktion ($y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$):

$$\begin{aligned} x \rightarrow \infty, \quad y = e^x \rightarrow \infty \\ \Leftrightarrow y \rightarrow \infty, \quad \ln y = x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Im Graphen entspricht das wiederum der Spiegelung an $y = x$ beim Übergang von e^x zur Umkehrfunktion $\ln x$.

11.5 Anwendung der Stetigkeit: Auffinden von Nullstellen

Man kann die Stetigkeit einer Funktion dazu benutzen, Nullstellen der Funktion zu bestimmen. Hier geht es aber nicht darum, eine Nullstelle direkt auszurechnen, sondern um die Aussage, dass in einem bestimmten Intervall mindestens eine Nullstelle liegen muss.

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die (mindestens) auf dem Intervall $[a, b]$ definiert ist. Angenommen, es gilt

$$f(a) < 0 \quad \text{und} \quad f(b) > 0.$$

Dann muss es ein $x_0 \in]a, b[$ geben mit $f(x_0) = 0$, d.h. f hat eine Nullstelle x_0 zwischen a und b .

Das folgt daraus, dass f zwischen a und b das Vorzeichen wechselt (von Minus nach Plus), siehe Abbildung 11.3. Außerdem ist f auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ definiert und dort stetig, und hat somit auf dem Intervall keine Sprungstellen (oder Definitionslücken). Somit muss der Graph von f auf dem Weg von negativen zu positiven Funktionswerten irgendwo zwischen a und b die x -Achse schneiden; f hat dort also eine Nullstelle.

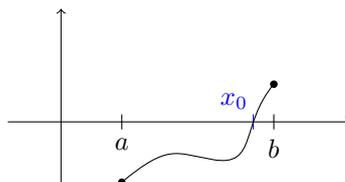


Abbildung 11.3: Nullstelle einer stetigen Funktion bei Vorzeichenwechsel

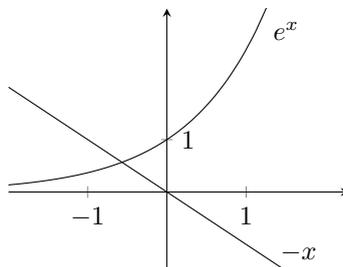
Die gleiche Argumentation gilt natürlich, wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, also bei einem Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus. Auch dann gibt es eine Nullstelle im Intervall $]a, b[$.

Mit dieser Methode wird also die Nullstelle zwar nicht wirklich berechnet; das Ergebnis sagt aber aus, dass eine Nullstelle zwischen a und b liegen muss. Man weiß also, dass es eine Nullstelle gibt und kennt außerdem ihre ungefähre Lage.

Beispiel 11.5.1 Wir suchen eine Lösung der Gleichung

$$e^x = -x. \quad (11.7)$$

Äquivalent heißt das, dass wir den Schnittpunkt der Kurven $y = e^x$ und $y = -x$ bestimmen wollen:



Anhand der Kurven sehen wir, dass der Schnittpunkt eine negative x -Koordinate hat.

Man kann nun versuchen, diesen Schnittpunkt zu berechnen, indem man (11.7) nach x auflöst. Man stellt dann aber fest, dass das nicht möglich ist. Das liegt daran, dass die Variable x sowohl im Exponenten von e^x als auch außerhalb davon, im Term $-x$ auf der rechten Seite, steht.

Um nun die Lage des Schnittpunkts genauer zu bestimmen, formen wir (11.7) um zu

$$e^x + x = 0.$$

Das heißt, die Lösung von (11.7) ist eine Nullstelle der Funktion $f(x) = e^x + x$. Hierauf wollen wir jetzt die obige Methode des Vorzeichenwechsels anwenden. Da wir vom Graphen schon wissen, dass die Nullstelle negativ ist, ist ein Intervall $[a, b]$ links von Null sinnvoll. Wir probieren $[-1, 0]$, d.h. $a = -1$ und $b = 0$. Es gilt

$$f(0) = e^0 + 0 = 1 > 0 \quad \text{und} \quad f(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1.$$

Wegen $e > 1$ ist $\frac{1}{e} < 1$ und somit

$$f(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0.$$

Also hat f zwischen $a = -1$ und $b = 0$ einen Vorzeichenwechsel. Weil f natürlich auch stetig ist (und auf ganz $[-1, 0]$ definiert), hat also f eine Nullstelle x_0 zwischen -1 und 0 :

$$x_0 \in]-1, 0[.$$

Durch *Intervallhalbierung* kann man jetzt die Lage der Nullstelle genauer bestimmen. Wir berechnen dafür $f(-\frac{1}{2})$:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2}.$$

Es gilt $\sqrt{e} < 2$ denn $\sqrt{e} < \sqrt{4} = 2$. Somit ist

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2} > 0,$$

d.h. f wechselt das Vorzeichen zwischen $x = -1$ und $x = -\frac{1}{2}$, die Nullstelle muss also dazwischen liegen,

$$x_0 \in]-1, -\frac{1}{2}[.$$

Diese Intervallhalbierung kann man nun wiederholt durchführen, und so die Nullstelle immer genauer näherungsweise berechnen.

Kapitel 12

Polynome und rationale Funktionen

Hinweis: In den alten Mathematik A&B Skripten finden sie den Stoff dieses Kapitels im Skript Mathematik A, Kapitel 2.2.1, 2.2.2.

12.1 Polynome, Polynomdivision

Eine Funktion der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (12.1)$$

heißt *Polynom*. Die Zahlen $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ sind die Koeffizienten des Polynoms, wobei wir annehmen, dass $a_n \neq 0$ ist, dass also die höchste Potenz x^n auch tatsächlich in p vorkommt. Der Exponent n der höchsten Potenz heißt *Grad* des Polynoms p . Man schreibt dafür

$$\text{Grad } p = n. \quad (12.2)$$

Man kann zwei Polynome durcheinander teilen und das Ergebnis wieder mithilfe von Polynomen ausdrücken. Dies ist die *Polynomdivision*:

Satz 12.1.1 (Polynomdivision) *Zu zwei Polynomen p und q gibt es Polynome h und r , so dass gilt $\text{Grad } r < \text{Grad } q$ und*

$$p(x) = h(x)q(x) + r(x). \quad (12.3)$$

Gleichung (12.3) ist äquivalent zu

$$\frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Das Ergebnis der Division von $p(x)$ durch $q(x)$ ist also ein Polynom $h(x)$, wobei noch ein *Rest* $r(x)$ bleiben kann, der sich nicht weiter durch $q(x)$ teilen lässt.¹ Der Rest $r(x)$ hat dabei einen kleineren Grad als der Nenner $q(x)$.

¹Das ist genauso wie bei der Division mit Rest für ganze Zahlen.

Rechenschema (und Beweis). Die gegebenen Polynome seien

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_0, \quad q(x) = b_m x^m + \dots + b_0,$$

also $\text{Grad } p = n$ und $\text{Grad } q = m$. Der Fall $n < m$ ist trivial: man kann $h = 0$, $r = p$ wählen, denn $\text{Grad } r = n < \text{Grad } q = m$ ist dann erfüllt.

Sei daher jetzt $n \geq m$.

- (i) Im ersten Schritt teilt man den Term mit höchstem Grad in p durch Term höchsten Grades in q :

$$\frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

Wegen $n \geq m$ kürzt sich hier x^m im Nenner komplett weg, und es bleibt x^{n-m} stehen mit $n - m \geq 0$.

- (ii) Man bildet jetzt das Polynom

$$r_1(x) = p(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} q(x). \quad (12.4)$$

Es gilt damit

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c_{n-m} x^{n-m} + \frac{r_1(x)}{q(x)} \quad \text{mit} \quad c_{n-m} = \frac{a_n}{b_m}.$$

(Folgt durch auflösen der vorigen Gleichung nach $p(x)$ und teilen durch $q(x)$.) Außerdem ist $\text{Grad } r_1 < \text{Grad } p$, d.h. der Grad des verbleibenden Polynoms $r_1(x)$ im Zähler hat sich verringert. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} r_1(x) &= a_n x^n + \dots - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} (b_m x^m + \dots) \\ &= a_n x^n + \dots - a_n x^n + \dots, \end{aligned}$$

die höchste Potenz x^n fällt also weg und der Grad vermindert sich damit mindestens um Eins.

- (iii) Falls $\text{Grad } r_1 \geq \text{Grad } q$, so beginnt man wieder bei Schritt (i), aber nun mit dem ersten Restpolynom r_1 anstelle von p . Man teilt also den Term höchsten Grades in r_1 durch den höchsten Term von q und bildet entsprechend den nächsten Rest $r_2(x)$. Es ist dann

$$\frac{r_1(x)}{q(x)} = c_l x^l + \frac{r_2(x)}{q(x)}$$

mit gewissen Zahlen $l < n - m$, $c_l \in \mathbb{R}$ und daher

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c_{n-m} x^{n-m} + c_l x^l + \frac{r_2(x)}{q(x)}.$$

Der Zählergrad hat sich dabei weiter verringert, $\text{Grad } r_2 < \text{Grad } r_1$. Diese Rechnung setzt man solange fort, bis $\text{Grad } r_k < \text{Grad } q$. Dann ist $r = r_k$.

□

Die Rechnungen der Polynomdivision können im Stil einer schriftlichen Division von Zahlen aufgeschrieben werden: Die erste Zeile enthält $p(x) : q(x) = h(x)$, und unter dem Zählerpolynom $p(x)$ schreibt man nacheinander die Berechnung der Reste $r_1(x), \dots, r_k(x)$. Wir zeigen das in folgendem Beispiel.

Beispiel 12.1.2 Wir berechnen $\frac{p(x)}{q(x)}$ für $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 7x + 9$ und $q(x) = x^2 - 4$ durch Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 3x^2 - 7x + 9) : (x^2 - 4) = 2x - 3 \\ -(2x^3 - 8x) \\ \hline - 3x^2 + x + 9 \\ -(-3x^2 + 12) \\ \hline x - 3 \end{array} \quad (12.5)$$

Wir erläutern nochmal die *Schritte in der Rechnung*: Zuerst wird der höchste Term von p durch den höchsten Term von q geteilt,

$$\frac{2x^3}{x^2} = 2x.$$

Das liefert den ersten Teil des Ergebnisses $h(x)$ hinter dem „=“-Zeichen. Wir multiplizieren das mit dem Nenner $q(x)$,

$$2x \cdot (x^2 - 4) = 2x^3 - 8x,$$

und schreiben das Ergebnis in einer Minusklammer unter $p(x)$. Wir berechnen nun diese Differenz, was genau $r_1(x)$ aus (12.4) ergibt:

$$\begin{aligned} r_1(x) &= p(x) - \frac{2x^3}{x^2}q(x) = (2x^3 - 3x^2 - 7x + 9) - 2x \cdot (x^2 - 4) \\ &= 2x^3 - 3x^2 - 7x + 9 - (2x^3 - 8x) = -3x^2 + x + 9 \end{aligned}$$

Da $\text{Grad } r_1 = 2 \geq \text{Grad } q = 2$ ist, sind wir noch nicht fertig. Wir teilen jetzt den höchsten Term des Rests r_1 durch den höchsten Term von q , multiplizieren wieder mit q und subtrahieren das dann von r_1 , was den nächsten Rest r_2 ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{-3x^2}{x^2} &= -3, & -3 \cdot (x^2 - 4) &= -3x^2 + 12 \\ \Rightarrow r_2(x) &= -3x^2 + x + 9 - (-3x^2 + 12) = x - 3 \end{aligned}$$

Jetzt ist $\text{Grad } r_2 = 1 < \text{Grad } q = 2$ und damit ist die Polynomdivision beendet. Das Ergebnis der Division ist $h(x) = 2x - 3$ mit dem Rest $r(x) = x - 3$. Es gilt somit

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 2x - 3 + \frac{x - 3}{x^2 - 4} \quad \left(= h(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \right)$$

Zur Probe bringen wir die rechte Seite wieder auf einen gemeinsamen Bruchstrich:

$$\begin{aligned} 2x - 3 + \frac{x - 3}{x^2 - 4} &= \frac{(2x - 3)(x^2 - 4) + x - 3}{x^2 - 4} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 + x - 3}{x^2 - 4} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2 - 7x + 9}{x^2 - 4} = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \checkmark \end{aligned}$$

12.2 Nullstellen von Polynomen

In diesem Abschnitt geht es um die Berechnung der Nullstellen von Polynomen. Dabei gibt es nur für Polynome kleinen Grades geschlossene Formeln zur Nullstellenberechnung. Für ein quadratisches Polynom (Grad 2) geht das mit der bekannten „p-q-Formel“ (bzw. quadratischer Ergänzung); für ein Polynom dritten Grades erhält man die Nullstellen aus den „Cardanischen Formeln“ und auch beim Grad 4 gibt es noch (komplizierte) Lösungsformeln. Ab dem 5. Grad gibt es jedoch keine solchen Lösungsformeln mehr.² Da schon die Cardanische Lösungsformeln für eine Gleichung 3. Grades ziemlich kompliziert sind, ist es wichtig ein Verfahren zu haben, mit der sich die Nullstellenberechnung vereinfachen lässt, sobald man eine Nullstelle des Polynoms gefunden hat.

Sei p ein Polynom, dessen Nullstellen wir suchen. Nehmen wir an, wir haben schon eine Nullstelle x_1 gefunden. Es gilt also $p(x_1) = 0$. Wie finden wir jetzt (möglichst einfach) weitere Nullstellen? Dazu führen wir eine Polynomdivision von p mit dem *Linearfaktor*

$$q(x) = x - x_1$$

zur Nullstelle durch. Das Ergebnis sind Polynome p_1 und r , so dass gilt

$$p(x) = p_1(x)q(x) + r(x) \quad (12.6)$$

und $\text{Grad } r < \text{Grad } q$. Da $\text{Grad } q = 1$ ist, folgt $\text{Grad } r = 0$, d.h. r ist konstant, $r(x) = c_0$. Indem wir $x = x_1$ in (12.6) einsetzen, ergibt sich

$$\underbrace{p(x_1)}_0 = p_1(x_1) \underbrace{q(x_1)}_0 + c_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = 0.$$

Der Rest $r(x)$ bei der Polynomdivision mit dem Linearfaktor einer Nullstelle ist also immer Null. Damit folgt dann $p(x) = p_1(x)q(x)$, also

$$p(x) = (x - x_1)p_1(x). \quad (12.7)$$

Dies ist die *Abspaltung des Linearfaktors* $x - x_1$ von p . Alle weiteren Nullstellen von p sind damit die Nullstellen von p_1 . Aufgrund von (12.7) ist $\text{Grad } p_1 = \text{Grad } p - 1$. Wir haben also durch die Abspaltung des Linearfaktors den Polynomgrad um Eins reduziert und damit das Problem vereinfacht.

Angenommen, wir haben jetzt für das reduzierte Polynom p_1 eine Nullstelle x_2 gefunden. Wir können dann den zugehörigen Linearfaktor $x - x_2$ mit Polynomdivision von p_1 abspalten,

$$p_1(x) = (x - x_2)p_2(x),$$

und Einsetzen in (12.7) ergibt dann

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)p_2(x).$$

Führt man dies für alle (reellen) Nullstellen x_1, \dots, x_k durch, so erhält man schließlich die *reelle Faktorisierung* von p :

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)p_k(x) \quad (12.8)$$

²Es ist sogar so, dass es für Grad 5 und höher keine Lösungsformeln mehr geben *kann*! Das lässt sich mathematisch beweisen.

Dabei hat das Polynom p_k keine reellen Nullstelle mehr. Aus (12.8) folgt $k \leq n (= \text{Grad } p)$, denn Ausmultiplizieren der Linearfaktoren auf der rechten Seite ergibt x^k als höchste Potenz; die rechte Seite hat also mindestens den Grad k . Das Polynom n . Grades p hat somit höchstens n (reelle) Nullstellen.

Beispiel 12.2.1 Wir berechnen reelle Faktorisierungen zweier Polynome.

(a) Sei

$$p(x) = 2x^3 + 11x^2 + 12x - 9.$$

Gegeben sei die Nullstelle $x_1 = -3$. Der zugehörige Linearfaktor ist dann $x - x_1 = x + 3$ und Polynomdivision ergibt

$$\begin{array}{r} (2x^3 + 11x^2 + 12x - 9) : (x + 3) = 2x^2 + 5x - 3 \\ -(2x^3 + 6x^2) \\ \hline 5x^2 + 12x - 9 \\ -(5x^2 + 15x) \\ \hline -3x - 9 \\ -(-3x - 9) \\ \hline 0 \end{array}$$

Man beachte, dass der Rest der Polynomdivision Null ist, so wie es beim Linearfaktor zu einer Nullstelle sein muss (siehe oben). Aus der Polynomdivision erhalten wir

$$p(x) = (x + 3)(2x^2 + 5x - 3).$$

Das reduzierte Polynom $p_1(x) = 2x^2 + 5x - 3$ ist quadratisch, wir können damit seine Nullstellen direkt ausrechnen:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x - 3 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 &= \frac{3}{2} + \frac{25}{16} = \frac{24 + 25}{16} = \frac{49}{16} \\ \Leftrightarrow x + \frac{5}{4} = \pm \frac{7}{4} &\Leftrightarrow x = -\frac{5}{4} \pm \frac{7}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -3. \end{aligned}$$

Dies sind also die Nullstellen von p_1 (und daher auch weitere Nullstellen von p). Die reelle Faktorisierung (12.8) von p_1 ist somit zunächst

$$p_1(x) = 2x^2 + 5x - 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)p_2(x).$$

Das Produkt der Linearfaktoren ist $(x - \frac{1}{2})(x + 3) = x^2 + \dots$. Vergleicht man das mit der höchsten Potenz in p_1 , also $2x^2$, so ergibt sich, dass $p_2(x)$ den Grad Null haben muss, also konstant ist, und dass diese Konstante gleich 2 sein muss: $p_2(x) = 2$. Also gilt

$$p_1(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3),$$

und durch Einsetzen in $p(x) = (x + 3)p_1(x)$ folgt

$$p(x) = (x + 3) \cdot 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)^2.$$

Dies ist die reelle Faktorisierung von p . Insgesamt hat damit p die Nullstellen $\frac{1}{2}$ und -3 . Dabei tritt die Nullstelle -3 doppelt auf, und ihr zugehöriger Linearfaktor $x + 3$ kommt in der Faktorisierung ebenfalls doppelt als Faktor vor, also quadratisch.

- (b) Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ und die Nullstelle $x_1 = 1$ von p . Aus der Polynomdivision

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 + x - 1) : (x - 1) = x^2 + 1 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline x - 1 \\ -(x - 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

erhalten wir

$$p(x) = (x - 1)(x^2 + 1). \quad (12.9)$$

Da das reduzierte Polynom $p_1(x) = x^2 + 1$ keine reellen Nullstellen hat, folgt, dass (12.9) schon die reelle Faktorisierung von p ist. Aber p_1 (und damit auch p) hat komplexe Nullstellen:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm j.$$

Das Produkt der entsprechenden (komplexen) Linearfaktoren ist

$$(x - j)(x + j) = x^2 - j^2 = x^2 + 1 = p_1(x).$$

Einsetzen in (12.9) ergibt dann

$$p(x) = (x - 1)(x - j)(x + j). \quad (12.10)$$

Wir erhalten also auch in diesem Beispiel eine vollständige Faktorisierung von p in Linearfaktoren, die in diesem Fall allerdings komplex ist.

Man kann nun beweisen, dass jedes Polynom eine vollständige, eventuell komplexe, Faktorisierung in Linearfaktoren hat.³ Das ist der *Fundamentalsatz der Algebra*:

Satz 12.2.2 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes reelle Polynom*

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_0,$$

$a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, *hat eine vollständige Faktorisierung*

$$p(x) = a_n (x - w_1) \cdot \dots \cdot (x - w_n). \quad (12.11)$$

w_1, \dots, w_n *sind die (reellen oder komplexen) Nullstellen von* p .

Ist w_i eine komplexe Nullstelle, dann ist auch \bar{w}_i eine der Nullstellen; komplexe Nullstellen treten also in konjugiert komplexen Paaren auf.

³Entscheidend dafür ist die Aussage, dass jedes Polynom überhaupt eine (vielleicht komplexe) Nullstelle hat. Abspalten des Linearfaktors führt dann auf das reduzierte Polynom p_1 , dass dann wieder eine Nullstelle hat, dessen Linearfaktor man wieder abspaltet, u.s.w.

Bemerkung:

- (a) In (12.11) können Nullstellen mehrfach auftreten. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die *verschiedenen* Nullstellen von p , dann wird die Faktorisierung (12.11) zu

$$p(x) = a_n(x - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_r)^{k_r}. \quad (12.12)$$

Die Anzahl k_i , mit der die Nullstelle λ_i vorkommt, heißt *Vielfachheit* von λ_i .

- (b) Ein Polynom n . Grades hat genau n Nullstellen, wobei mehrfache Nullstellen sooft wie ihre Vielfachheit gezählt werden. Es gilt also

$$k_1 + \dots + k_r = n. \quad (12.13)$$

Dies folgt aus (12.11) bzw. (12.12) durch betrachten des Polynomgrads.

12.3 Bestimmung von Nullstellen

Wie am Beginn des letzten Abschnitts gesagt, gibt es für ein Polynom beliebigen Grades keine allgemeine Formel zur Berechnung der Nullstellen. Es gibt aber bestimmte Fälle, in denen Nullstellen oder zumindest *mögliche* Nullstellen, doch bestimmt werden können.

Der erste Fall sind Polynome *ohne konstantem Glied*

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x,$$

also mit $a_0 = 0$. In diesem Fall ist $x = 0$ *immer* eine Nullstelle. Denn man kann den Faktor x ausklammern:

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x = x \cdot (a_n x^{n-1} + \dots + a_1) \quad (12.14)$$

Damit ist

$$p(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee a_n x^{n-1} + \dots + a_1 = 0,$$

denn ein Produkt ist Null genau dann, wenn einer der beiden Faktoren Null ist. (12.14) entspricht übrigens der Abspaltung des Linearfaktors $x - 0 = x$ für die Nullstelle $x = 0$. Ist außerdem in (12.14) auch $a_1 = 0$, so kann man x erneut ausklammern. . .

Der nächste Fall ist ein Polynom 4. Grades, das nur *gerade* Potenzen von x enthält: $p(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Die Berechnung der Nullstellen $p(x) = 0$ führt auf die sogenannte *bi-quadratische* Gleichung

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Durch die Substitution $y = x^2$ kann sie in die quadratische Gleichung

$$ay^2 + by + c = 0$$

umgeformt werden, die man lösen kann. Die Lösungen der bi-quadratischen Gleichung sind dann $x = \pm\sqrt{y}$.

Für ein Polynom, das nur ganze Zahlen als Koeffizienten hat, kann man alle *möglichen rationalen Nullstellen* angeben:

Satz 12.3.1 Sei $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ wobei $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ und $a_0, a_n \neq 0$. Dann ist jede rationale Nullstelle $x_0 \in \mathbb{Q}$ von der Form

$$x_0 = \pm \frac{b}{c} \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} b \text{ Teiler von } |a_0|, \\ c \text{ Teiler von } |a_n|. \end{cases}$$

Beispiel 12.3.2 Wir betrachten

$$p(x) = 3x^3 + 2x^2 + 11x - 4.$$

Alle Koeffizienten von p sind ganze Zahlen, damit ist Satz 12.3.1 anwendbar. Es gilt

- Teiler von $|a_0| = 4$: 1, 2, 4
- Teiler von $|a_n| = 3$: 1, 3

Damit sind die *möglichen* rationalen Nullstellen von p :

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}$$

Man kann jetzt durch Einsetzen nacheinander prüfen, ob eine dieser Zahlen tatsächlich eine Nullstelle ist. Sobald man auf diese Art eine Nullstelle gefunden hat, kann man p durch Abspalten des Linearfaktors mittels Polynomdivision vereinfachen.

Bemerkung: Für ein Polynom der Form

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0, \quad (a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{Z})$$

also mit $a_n = 1$, folgt aus Satz 12.3.1, dass alle ganzzahligen Nullstellen von p Teiler von a_0 sind, es aber keine Brüche mit Nenner $\neq 1$ als Nullstellen geben kann. Die Nullstellen von p sind somit hier nur ganze oder irrationale Zahlen.

12.4 Horner-Schema

Mit dem Horner-Schema kann effizient der Funktionswert des Polynoms $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ berechnet werden. Dazu berechnet man für den gegebenen Wert x sukzessive die Zahlen

$$\begin{aligned} c_n &= a_n \\ c_{n-1} &= c_n x + a_{n-1} \\ &\vdots \\ c_1 &= c_2 x + a_1 \\ c_0 &= c_1 x + a_0 \end{aligned}$$

Dann ist $c_0 = p(x)$.

Das Horner-Schema lässt sich praktisch als Tabelle schreiben:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ \hline x & c_n & c_{n-1} & \dots & c_1 & c_0 \end{array} = p(x)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{c_n \cdot x + a_{n-1}}$

Im Schema berechnet man die Koeffizienten c_i von links nach rechts: Der erste Wert c_n ist gleich dem Wert a_n direkt darüber. Jeden weiteren Koeffizienten c_{i-1} berechnet man dann, indem man das gerade vorher berechnete c_i links daneben mit x multipliziert und dazu dann den nächsten Wert a_{i-1} darüber addiert. Der letzte berechnete Wert c_0 ist dann $p(x)$.

Wir zeigen für ein Polynom dritten Grades ($n = 3$), wie das Horner-Schema zustande kommt. Dazu schreiben wir zunächst $p(x)$ durch mehrfaches Ausklammern von x um:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= (a_3x^2 + a_2x + a_1)x + a_0 \\ &= ((a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0 \end{aligned}$$

Liest (beziehungsweise berechnet) man diesen verschachtelten Ausdruck von Innen nach Außen, so ergeben sich nacheinander genau die Koeffizienten c_i des Horner-Schemas:

$$\begin{aligned} p(x) &= ((a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0 \\ &= \underbrace{((c_3x + a_2)x + a_1)}_{c_2}x + a_0 \\ &= \underbrace{(c_2x + a_1)}_{c_1}x + a_0 = c_1x + a_0 = c_0 \end{aligned}$$

Bemerkung: Der Vorteil des Horner-Schemas liegt u.a. im geringeren Rechenaufwand. Das Horner-Schema benötigt lediglich n Multiplikationen während bei der Standardform des Polynoms $p(x) = a_nx^n + \dots$ (mindestens) $2n - 1$ Multiplikationen nötig sind (wegen der zusätzlichen Berechnung der Potenzen x^k). Bei der Auswertung von Polynomen in numerischer Software wird daher immer das Horner-Schema benutzt. Aber auch für die Berechnung „von Hand“ kann das Horner-Schema einen geringeren Rechenaufwand bedeuten, weil keine Potenzen von x berechnet werden müssen.

Im Zusammenhang mit Nullstellen von Polynomen hat das Horner-Schema zudem eine *weitere sehr praktische Eigenschaft*: Ist $x = x_1$ eine Nullstelle von p , das heißt das Horner-Schema endet mit $c_0 = 0$, dann sind die Koeffizienten c_n, \dots, c_1 genau die Koeffizienten des Polynoms $p_1(x)$, das durch Abspalten des Linearfaktors zu x_1 entsteht. Es gilt also

$$p(x) = (x - x_1) \underbrace{(c_nx^{n-1} + \dots + c_2x + c_1)}_{p_1(x)}$$

Man erspart sich damit also die Polynomdivision zur Berechnung von $p_1(x)$.

Beispiel 12.4.1 Wir betrachten nochmal das Polynom aus Beispiel 12.2.1(a)

$$p(x) = 2x^3 + 11x^2 + 12x - 9.$$

Das Horner-Schema für $x = -3$ ergibt

$$\frac{\quad}{x = -3} \parallel \begin{array}{c|c|c|c} 2 & 11 & 12 & -9 \\ \hline 2 & 5 & -3 & 0 \end{array} = p(x)$$

$\xrightarrow{2 \cdot (-3) + 11}$

Es ist also $p(-3) = 0$, d.h. $x = -3$ ist eine Nullstelle von p . Zusätzlich erhalten wir noch – durch Ablesen der Koeffizienten vor der Null – das reduzierte Polynom p_1 nach Abspaltung des Linearfaktors $x + 3$:

$$p(x) = (x + 3)p_1(x) = (x + 3)(2x^2 + 5x - 3).$$

Dies ist dasselbe Ergebnis, das wir auch im Beispiel 12.2.1 erhalten hatten.

12.5 Existenz reeller Nullstellen

Im Allgemeinen ist es möglich, dass ein reelles Polynom ausschließlich komplexe Nullstellen hat; ein Beispiel ist natürlich $x^2 + 1$. Polynome, deren Grad ungerade ist, haben jedoch immer mindestens eine reelle Nullstelle. Das ergibt sich aus der Stetigkeit des Polynoms und dem Verhalten für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$.

Sei $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ mit $n = \text{Grad } p$ ungerade. Um die Grenzwerte von $p(x)$ für $x \rightarrow \infty$ und $-\infty$ zu berechnen, klammern wir zuerst die höchste Potenz x^n aus:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \left(\underbrace{a_n + a_{n-1} \cdot \frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} + \dots + \underbrace{a_0 \cdot \frac{1}{x^n}}_{\rightarrow 0} \right)$$

Der Term in der Klammer konvergiert also gegen a_n für $x \rightarrow \infty$. Für sehr große Werte von x wird also x^n mit einer Zahl multipliziert, die ungefähr gleich a_n ist, der Grenzwert von $p(x)$ verhält sich daher genauso wie der von $a_n x^n$. Ist nun $a_n > 0$, so folgt aus $x^n \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$, dass $a_n x^n \rightarrow \infty$. Ist dagegen $a_n < 0$, so ergibt sich $a_n x^n \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{wenn } a_n > 0 \\ -\infty & \text{wenn } a_n < 0 \end{cases}$$

Für $x \rightarrow -\infty$ erhalten wir stattdessen

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \left(\underbrace{a_n + a_{n-1} \cdot \frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} + \dots + \underbrace{a_0 \frac{1}{x^n}}_{\rightarrow 0} \right) = \begin{cases} -\infty, & a_n > 0 \\ +\infty, & a_n < 0 \end{cases}$$

denn es gilt ja $x^n \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow \infty$ da n ungerade ist! In beiden Fällen ($a_n > 0$ und $a_n < 0$) *wechselt also $p(x)$ sein Vorzeichen*. Da p stetig ist, hat das Polynom somit (mindestens) eine reelle Nullstelle. Für den Fall $a_n > 0$ ist das in Abbildung 12.1 skizziert.

12.6 Rationale Funktionen

Wir untersuchen jetzt rationale Funktionen, speziell ihr Verhalten an Definitionslücken und bei $x \rightarrow \pm\infty$.

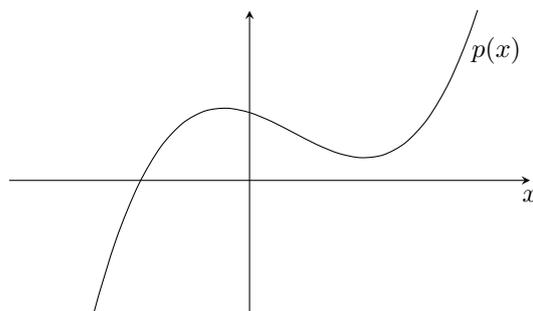


Abbildung 12.1: Typischer Verlauf eines Polynoms von ungeradem Grad

Eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} \quad (a_n \neq 0, b_m \neq 0) \quad (12.15)$$

heißt *rationale Funktion*. Der maximale Definitionsbereich der rationalen Funktion sind alle $x \in \mathbb{R}$ für die $q(x) \neq 0$ ist, also

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\text{reelle Nullstellen von } q\}.$$

Die Nullstellen von f sind alle Nullstellen von p , die in D_f liegen, für die also $q(x) \neq 0$ gilt. Denn ein Bruch ist Null genau dann wenn der Zähler Null ist:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = 0 \quad (\text{bei } q(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in D_f)$$

Verhalten an den Definitionslücken

Sei x_0 eine Definitionslücke von f , also $x_0 \notin D_f$, d.h. $q(x_0) = 0$. Wir wollen den Grenzwert von $f(x)$ bei $x \rightarrow x_0$ berechnen.

- 1. Fall** $p(x_0) \neq 0$. Bei $x \rightarrow x_0$ konvergieren $p(x) \rightarrow p(x_0) \neq 0$ und $q(x) \rightarrow q(x_0) = 0$. Für $x \rightarrow x_0$ nähert sich also im Bruch $\frac{p(x)}{q(x)}$ der Zähler immer mehr der festen Zahl $p(x_0) \neq 0$, während der Nenner immer kleiner wird. Der Bruch wird somit vom Betrag her immer größer und konvergiert (bis auf das Vorzeichen) gegen Unendlich. Dieses Vorzeichen kann auch von der Richtung der Konvergenz $x \rightarrow x_0$ abhängen ($x < x_0$ oder $x > x_0$), so dass hier im Allgemeinen einseitige Grenzwerte nötig sind:

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \pm\infty, \quad \lim_{x \searrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \pm\infty$$

Beachte, dass das Vorzeichen des links- und rechtsseitigen Grenzwerts je nach konkreter Funktion gleich sein können (z.B. beide $+\infty$) oder auch verschieden (einer $+\infty$, der andere $-\infty$). Für den Betrag der Funktion gilt jedenfalls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|p(x)|}{|q(x)|} = \infty,$$

und man nennt x_0 eine *Polstelle*.

2. Fall $p(x_0) = 0$. In diesem Fall ist x_0 also Nullstelle von p und q . Das Verhalten von f hängt dann von den Vielfachheiten der Nullstelle ab. Es sei k die Vielfachheit von x_0 als Nullstelle von p , und l die Vielfachheit als Nullstelle von q . Wir können dann den Linearfaktor $x - x_0$ von p und q abspalten, und zwar sooft, wie es die Vielfachheit jeweils angibt:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - x_0)^k p_1(x), & q(x) &= (x - x_0)^l q_1(x) \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{(x - x_0)^k p_1(x)}{(x - x_0)^l q_1(x)} \end{aligned}$$

wobei $p_1(x_0) \neq 0$ und $q_1(x_0) \neq 0$. (Denn sonst hätte man die Nullstelle nochmal von p_1 bzw. q_1 abspalten können.) In $f(x)$ kann der Linearfaktor $x - x_0$ nun gekürzt werden.

Falls $l > k$ ist, so bleibt $x - x_0$ im Nenner stehen:

$$l > k \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{p_1(x)}{(x - x_0)^{l-k} q_1(x)}$$

x_0 ist dann Nullstelle des Nenners, aber nicht vom Zähler (denn $p_1(x_0) \neq 0$). Wir haben damit die gleiche Situation wie im 1. Fall; x_0 ist also eine Polstelle.

Falls $k \geq l$, so kürzt sich $x - x_0$ im Nenner vollständig weg:

$$k \geq l \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{(x - x_0)^{k-l} p_1(x)}{q_1(x)}. \quad (12.16)$$

Für den Grenzwert $x \rightarrow x_0$ erhalten wir damit jetzt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} \frac{p_1(x_0)}{q_1(x_0)} (\neq 0), & \text{wenn } k = l \\ 0, & \text{wenn } k > l \end{cases}$$

Man sagt in diesem Fall, die Definitionslücke x_0 ist *hebbar*. Man kann jetzt x_0 mit in den Definitionsbereich D_f dazunehmen, indem man als Funktionsterm für $f(x)$ (12.16) verwendet. Damit gilt

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

f ist also in x_0 stetig.

Beispiel 12.6.1 Gegeben ist die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Wir untersuchen Verhalten von f bei $x \rightarrow -1$. Da -1 keine Nullstelle des Zählers ist, $p(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 \neq 0$, ist -1 eine Polstelle. Wir berechnen die einseitigen Grenzwerte.

$$\begin{aligned} x \nearrow -1 &\Rightarrow 2x - 1 \rightarrow -3, \quad x + 1 \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad x + 1 < 0 \quad \text{da} \quad x < -1 \\ &\Rightarrow \frac{2x - 1}{x + 1} > 0 \quad \text{und damit} \quad \frac{2x - 1}{x + 1} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Also gilt

$$\lim_{x \nearrow -1} \frac{2x-1}{x+1} = +\infty.$$

Entsprechend gilt

$$\begin{aligned} x \searrow -1 &\Rightarrow 2x-1 \rightarrow -3, \quad x+1 \rightarrow 0 \text{ und } x+1 > 0 \text{ da } x > -1 \\ &\Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} < 0, \quad \text{also } \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

d.h.

$$\lim_{x \searrow -1} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty.$$

Asymptotisches Verhalten bei $x \rightarrow \pm\infty$

Hier möchten wir die Grenzwerte einer rationalen Funktion $f(x)$ bei $x \rightarrow \pm\infty$ bestimmen, was auch *asymptotisches Verhalten* genannt wird. Wir klammern dazu in Zähler und Nenner jeweils die höchste Potenz aus:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \frac{x^n}{x^m} \cdot \underbrace{\frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^m}}}_{\rightarrow \frac{a_n}{b_m} \text{ für } x \rightarrow \pm\infty}$$

Der Grenzwert von f hängt somit davon ab, ob beim Kürzen von $\frac{x^n}{x^m}$ im Zähler oder im Nenner eine x -Potenz stehen bleibt, ob also der Grad des Zählers oder des Nenners größer ist:

$$\begin{aligned} n < m &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 && \left(\text{denn dann } \frac{x^n}{x^m} = \frac{1}{x^{m-n}} \rightarrow 0 \right) \\ n = m &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m} && \left(\frac{x^n}{x^m} = 1 \right) \\ n > m &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty && \left(\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \rightarrow \pm\infty \right) \end{aligned}$$

Im letzten Fall ist das Vorzeichen im Grenzwert von $f(x)$ noch abhängig vom Vorzeichen von $\frac{a_n}{b_m}$.

Das asymptotische Verhalten im Fall $n > m$ können wir noch genauer bestimmen, indem wir den Quotienten $\frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomdivision umschreiben:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Wegen $\text{Grad } r < \text{Grad } q$ ist

$$\frac{r(x)}{q(x)} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow \pm\infty,$$

und das heißt, dass

$$f(x) \approx h(x) \quad \text{für } |x| \text{ groß.}$$

Anders gesagt, nähert sich der Graph von $f(x)$ im Grenzwert $x \rightarrow \pm\infty$ immer mehr dem Graphen von $h(x)$ an. ($h(x)$ wird auch *Asymptote* genannt.)

Beispiel 12.6.2 (a) Es ist

$$f(x) = \frac{-2x + 3}{7x^2 + x - 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

(Denn hier ist Zählergrad < Nennergrad, $n = 1 < m = 2$)

(b) Bei der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{-x^2 + x}{2x + 2}$$

ist der Zählergrad größer als der Nennergrad (Fall $n > m$). Es gilt somit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = \infty$. Zur genauen Bestimmung des asymptotischen Verhaltens benutzen wir jetzt Polynomdivision. Das Ergebnis ist:

$$f(x) = \frac{-x^2 + x}{2x + 2} = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{-2}{2x + 2}$$

(Wir überlassen die vollständige Rechnung dem Leser.) Die Asymptote ist also $h(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, d.h. es gilt

$$f(x) \approx -\frac{1}{2}x + 1 \quad \text{bei } x \rightarrow \pm\infty.$$

Insbesondere folgt daraus

$$f(x) \rightarrow \begin{cases} -\infty & \text{bei } x \rightarrow +\infty \\ \infty & \text{bei } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

es gilt z.B. $-\frac{1}{2}x + 1 \rightarrow -\infty$ bei $x \rightarrow \infty$.

Wir untersuchen jetzt noch die Definitionslücke von f . Die Nullstelle des Nenners ist

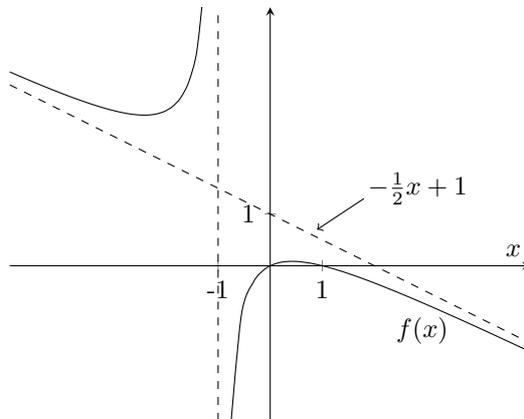
$$2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Die einseitigen Grenzwerte in -1 sind

$$\lim_{x \nearrow -1} \frac{-x^2 + x}{2x + 2} = \infty, \quad \lim_{x \searrow -1} \frac{-x^2 + x}{2x + 2} = -\infty.$$

(Denn $-x^2 + x \rightarrow -2$ bei $x \rightarrow -1$ und $2x + 2 < 0$ bei $x \nearrow -1$ sowie > 0 bei $x \searrow -1$.) $x = -1$ ist damit eine Polstelle.

Aus diesen Informationen (zusammen mit den Nullstellen von f , $f(0) = f(1) = 0$) erhalten wir bereits ein genaues Bild der Funktion:



Kapitel 13

Differentialrechnung

Die Differentialrechnung befasst sich mit *Ableitungen* von Funktionen, um damit zum Beispiel Aussagen über ihren Verlauf (etwa Steigung und Monotonie) machen zu können. Die Ableitung beschreibt das Änderungsverhalten einer Funktion, und spielt damit eine zentrale Rolle sowohl in der Mathematik als auch in den Anwendungen.

Hinweis: In den alten Mathematik A&B Skripten finden sie den Stoff dieses Kapitels im Skript Mathematik A, Kapitel 3.1–3.3.

13.1 Die Ableitung einer Funktion

Definition 13.1.1 Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in]a, b[$. Die Funktion f heißt *differenzierbar an der Stelle x_0* , wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (13.1)$$

existiert. Die Zahl $f'(x_0)$ heißt dann *Ableitung* von f in x_0 .

Die Funktion f heißt *differenzierbar* (auf $]a, b[$), wenn f in jedem $x_0 \in]a, b[$ differenzierbar ist.

Mit der Substitution $h = x - x_0$ kann die Definition der Ableitung äquivalent auch so geschrieben werden:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (13.2)$$

(denn $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$)

Eine weitere Schreibweise für die Ableitung geht auf Leibniz zurück. Dazu wird zuerst der Quotient in (13.1) als *Differenzenquotient* geschrieben, d.h. mit den Differenzen Δx und Δy (wobei $y = f(x)$):

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (13.3)$$

Den Grenzübergang $x \rightarrow x_0$, also $\Delta x \rightarrow 0$, versteht Leibniz dann als Übergang von den endlich großen Differenzen Δx und Δy zu den unendlich kleinen

Differenzialen dx und dy :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}. \quad (13.4)$$

Die Ableitung heißt darum auch *Differentialquotient*.

Beispiel 13.1.2 Wir berechnen die Ableitung zweier Funktionen mit der Definition, also über den Differenzenquotient.

(a) Sei f die Gerade mit Steigung a ,

$$f(x) = ax + b.$$

Mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten aus (13.2) ist

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h) + b - (ax_0 + b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a = a. \end{aligned}$$

Da der Grenzwert existiert, ist die Funktion in x_0 differenzierbar und die Ableitung ist $f'(x_0) = a$. Da x_0 beliebig war, ist f differenzierbar (auf ganz \mathbb{R}) mit

$$f'(x) = a.$$

Insbesondere folgt (für $a = 0$):

$$f(x) = b \text{ (konst.)} \Rightarrow f'(x) = 0. \quad (13.5)$$

(b) Sei f die Normalparabel

$$f(x) = x^2.$$

Hier ist

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0 \end{aligned}$$

Da x_0 wieder beliebig war, folgt, dass f auf ganz \mathbb{R} differenzierbar ist mit der Ableitung

$$f'(x) = 2x.$$

Bemerkung: Aus der Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit einer Funktion. Genauer gilt:

$$f \text{ differenzierbar in } x_0 \Rightarrow f \text{ stetig in } x_0$$

Das folgt so: Für $x \neq x_0$ können wir schreiben

$$f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

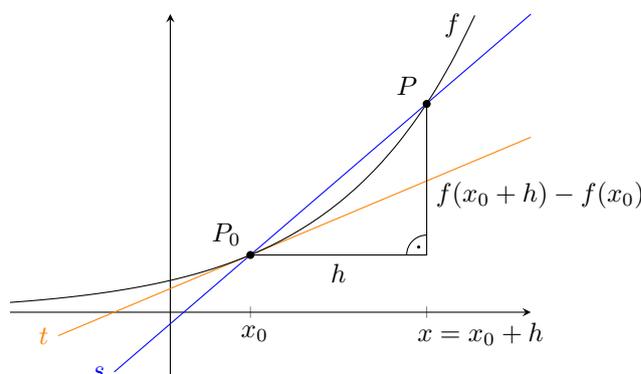


Abbildung 13.1: Ableitung als Tangentensteigung

Im Grenzwert $x \rightarrow x_0$ folgt daraus

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\rightarrow 0} \right) = f(x_0),$$

d.h. f ist stetig in x_0 . Hier ist entscheidend, dass der Grenzwert des Differenzenquotienten (also die Ableitung in x_0) existiert, damit wir für das Produkt mit $x - x_0$ die Grenzwertrechenregel (Satz 11.2.1) anwenden können.

13.2 Die Ableitung als Tangentensteigung

Die Ableitung einer Funktion f lässt sich als Steigung der Tangente an den Graphen von f verstehen. Wir betrachten dazu zwei Punkte P_0 und P auf dem Graphen von f und die durch sie verlaufende Sekante s , siehe Abbildung 13.1. Die Steigung von s lässt sich dann über das eingezeichnete Steigungsdreieck berechnen zu

$$\text{Steigung Sekante} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \left(= \frac{\Delta y}{\Delta x} \right),$$

das ist genau der Differenzenquotient von f . Wenn wir jetzt den Punkt P gegen P_0 laufen lassen, also den Grenzwert $h \rightarrow 0$ betrachten, nähert sich die Sekante immer mehr der Tangente t an. Die Steigung der Tangente ist dann der Grenzwert der Sekantensteigungen,

$$\text{Steigung Tangente} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Das ist exakt die Definition der Ableitung aus (13.2). Die Ableitung von f in x_0 ist also gleich der Steigung der Tangente an f im Punkt x_0 :

$$f'(x_0) = \text{Steigung Tangente in } x_0 \quad (13.6)$$

Wir notieren noch die *Gleichung der Tangente* in x_0 :

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (13.7)$$

Dies ist einfach die Punkt-Steigungsform $y = m(x - x_0) + y_0$ einer Geraden durch den Punkt $P_0 = (x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ mit der Steigung $m = f'(x_0)$.

13.3 Ableitungsregeln

Es folgen hier die bekannten Ableitungsregeln für Summen, Produkte und Quotienten von Funktionen, sowie die Kettenregel und die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion.

Satz 13.3.1 *Sind f, g differenzierbare Funktionen, dann sind auch die Funktionen $f + g$, $c \cdot f$ ($c \in \mathbb{R}$), $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ differenzierbar mit den Ableitungen*

$$(a) (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(b) (cf)'(x) = c \cdot f'(x) \quad \textit{konstanter Faktor}$$

$$(c) (f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \textit{Produktregel}$$

$$(d) \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad \textit{Quotientenregel}$$

Beweis. Alle Regeln folgen durch Anwenden der Rechenregeln für Grenzwerte auf den Differenzenquotienten der jeweiligen Funktion; bei (c) und (d) ist noch geschicktes Umformen nötig. Wir zeigen exemplarisch (a) und (c):

$$\begin{aligned} (f + g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) + \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) \right) \\ &= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir für $f(x) \rightarrow f(x_0)$ benutzt, dass f nach der Bemerkung auf Seite 178 als differenzierbare Funktion auch stetig ist. \square

Als Folgerung aus der Produktregel ergibt sich die Regel für die Ableitung der Potenz x^n .

Folgerung 13.3.2 *Für $n \in \mathbb{N}^*$ gilt*

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1} \quad (13.8)$$

Beweis. Der Fall $n = 1$ folgt aus Beispiel 13.1.2(a): mit $a = 1$ und $b = 0$ ist dort

$$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1.$$

Die Ableitung von x^2 kann man nun mittels Produktregel aus dem Fall $n = 1$ herleiten:

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (x^2)' = (x \cdot x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

x^3 führt man auf die – jetzt schon bekannten – Ableitungen von x^2 und x zurück, entsprechend x^4 auf x^3 , u.s.w.

$$(x^3)' = (x \cdot x^2)' = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$$

$$(x^4)' = (x \cdot x^3)' = 1 \cdot x^3 + x \cdot 3x^2 = 4x^3$$

(Mathematisch elegant würde man hier wieder vollständige Induktion benutzen.) \square

Beispiel 13.3.3 Wir illustrieren die bisherigen Ableitungsregeln an der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{2x^4 - 2x + 1}{x^2 - 1}.$$

Aus der Quotientenregel (und der Ableitungsregel für Summen, konstantem Faktor und x^n) folgt

$$f'(x) = \frac{(8x^3 - 2)(x^2 - 1) - (2x^4 - 2x + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \dots$$

Die Kettenregel gibt an, wie die Verkettung zweier Funktionen $g \circ f$ abgeleitet wird:

Satz 13.3.4 (Kettenregel) Sind f und g differenzierbar, dann ist auch die Verkettung $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ differenzierbar, und die Ableitung ist

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Merksatz: „äußere mal innere Ableitung“

Beweis. Wir verwenden die Substitution $u = f(x)$, $u_0 = f(x_0)$ und erweitern dann den Differenzenquotienten für $g(f(x))$ mit dem Ausdruck $f(x) - f(x_0) = u - u_0$:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Im Grenzwert $x \rightarrow x_0$ gilt auch $u \rightarrow u_0$ (denn f ist stetig, weil differenzierbar) und damit folgt

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= g'(u_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \end{aligned}$$

\square

Schließlich jetzt die Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion:

Satz 13.3.5 (Ableitung der Umkehrfunktion) *Ist f invertierbar und f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$, und die Ableitung ist*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Man beachte, dass f^{-1} nicht automatisch an allen Stellen differenzierbar ist, wo f differenzierbar ist, sondern nur dort, wo zusätzlich auch $f'(x_0) \neq 0$ gilt.

Beweis. Für die Ableitung von f^{-1} in y_0 gilt, zusammen mit $x = f^{-1}(y)$,

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{x - x_0}{y - y_0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Das ist also genau der Kehrwert des Differenzenquotienten von f aus (13.3). Nun gilt $\Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$, was eine Konsequenz der Stetigkeit von f^{-1} ist (Satz 11.3.3). Damit folgt

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Beispiel 13.3.6 (a) Als Anwendung und Beispiel für die Ableitung der Umkehrfunktion leiten wir die Formel für die Ableitung von \sqrt{x} her. Sei

$$f(x) = x^2 \quad \text{mit Definitionsbereich} \quad D_f =]0, \infty[.$$

Für $x \in D_f$ ist dann $x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$. Also ist f invertierbar mit der Umkehrfunktion

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

Wir können nun Satz 13.3.5 anwenden: Es ist $f'(x) = 2x \neq 0$ für alle $x \in D_f$ weil $D_f =]0, \infty[$. (Aus diesem Grund haben wir 0 *nicht* mit zum Definitionsbereich D_f hinzugenommen!) Somit folgt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \text{für } x \in D_f.$$

Ersetzen wir jetzt noch y durch x (wie bei der Berechnung der Umkehrfunktion), erhalten wir die Formel für die Ableitung von \sqrt{x} :

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

(b) Als Beispiel für die Kettenregel berechnen wir die Ableitung von

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 5}.$$

$f(x)$	$f'(x)$ (evt. mit Bedingung an x)
c (konst.)	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$ für $\begin{cases} x \in \mathbb{R} & \text{wenn } \alpha \in \mathbb{N}^* \\ x \neq 0 & \text{wenn } \alpha = -1, -2, \dots \\ x > 0 & \text{wenn } \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, $x > 0$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{N}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$, $x > 0$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$, $x \neq 0$
a^x	$\ln(a)a^x$, $a > 0$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in]-1, 1[$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in]-1, 1[$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Tabelle 13.1: Ableitungen der elementaren Funktionen

f ist die Verkettung der Wurzelfunktion mit einem Polynom, $f(x) = g(h(x))$ mit $u = h(x) = x^2 - 7x + 5$ (innere Funktion) und $g(u) = \sqrt{u}$ (äußere Funktion). Die Ableitungen sind

$$g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad h'(x) = 2x - 7.$$

Nach der Kettenregel ist damit

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 7x + 5}} \cdot (2x - 7).$$

(äußere mal innere Ableitung)

13.4 Ableitungen elementarer Funktionen

In Tabelle 13.1 sind die Ableitungen der elementaren Funktionen zusammengestellt. Ableitungen zusammengesetzter komplexerer Funktionen lassen sich daraus mit den Ableitungsregeln des letzten Abschnitts berechnen.

Es folgen Beweise zu den Ableitungen in Tabelle 13.1. In einigen Fällen sind das auch praktische Rechenricks, mit denen man die Ableitung im konkreten Fall direkt berechnen kann, ohne sich die allgemeine Formel aus der Tabelle merken zu müssen.

Beweise.

(a) $(e^x)' = e^x$. Die Ableitung der Exponentialfunktion ergibt sich aus der Definition von e^x über die Potenzreihe; dies wird erst in Mathematik B behandelt.

(b) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Dies folgt aus der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen (Satz 13.3.5) und (a): Mit $y = f(x) = e^x$ ist $f^{-1}(y) = \ln y$. Damit folgt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

(c) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

(i) Fall $\alpha = n \in \mathbb{N}$: Das ist Folgerung 13.3.2 (beziehungsweise Beispiel 13.1.2(a) für $n = 0$).

(ii) Fall $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \neq 0$: Mit $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ erhält man aus der Quotientenregel und Fall (i)

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

(iii) Fall $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$: Wir schreiben die allgemeine Potenz x^α mit der Exponential- und Logarithmusfunktion,

$$x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x},$$

(siehe (4.11)) und benutzen dann die Kettenregel:

$$(e^{\alpha \cdot \ln x})' = e^{\alpha \cdot \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

(d) Ableitung der n . Wurzel. Wir schreiben die Wurzel als Potenz,

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}},$$

und leiten dann mit der Regel für Potenzen ab:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

(e) Für die Ableitung von $\ln|x|$ unterscheiden wir die Fälle $x > 0$ und $x < 0$:

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ \ln(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Bei $x > 0$ ist das die schon bekannte Ableitung aus (b), $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Für $x < 0$ erhalten wir durch anwenden der Kettenregel

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Die Ableitung ist also in beiden Fällen $\frac{1}{x}$.

- (f) Ableitung von $\sin x$. Hier berechnen wir die Ableitung über den Differenzenquotienten und das Additionstheorem für den Sinus:

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) \end{aligned}$$

Aus Beispiel 11.2.2 kennen wir den Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1. \quad (13.9)$$

Zur Berechnung des anderen Grenzwerts setzen wir $\alpha = \frac{h}{2}$, d.h. $h = 2\alpha$ und benutzen die Formel

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad (13.10)$$

die sich aus dem Additionstheorem für Cosinus ergibt, sowie $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(h) - 1}{h} &= \frac{\cos(2\alpha) - 1}{2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - 1}{2\alpha} \\ &= \frac{-2 \sin^2 \alpha}{2\alpha} = \underbrace{-\sin \alpha}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\sin \alpha}{\alpha}}_{\rightarrow 1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

bei $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow \alpha \rightarrow 0$. Damit folgt

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\rightarrow 0} + \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1} \right) = \cos x.$$

Bemerkung: Bei der Herleitung des Grenzwerts (13.9) in Beispiel 11.2.2 war entscheidend, dass der Sinus mit dem Winkel in Bogenmaß verwendet wird. Daher ist auch die Ableitung $(\sin x)' = \cos x$ und alle anderen Ableitungsformeln der trigonometrischen und Arcusfunktionen in Tabelle 13.1 *nur richtig für den Winkel in Bogenmaß*.

- (g) Aus

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

und der Kettenregel folgt

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

- (h) Ableitung von $\arcsin x$. Für $y = f(x) = \sin x$ mit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist $f^{-1}(y) = \arcsin(y)$ und damit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Beachte: Damit die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion anwendbar ist, muss $f'(x) = \cos x \neq 0$ gelten ($f'(x)$ im Nenner!). Daher wurde der Definitionsbereich des Sinus für die Umkehrfunktion auf $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ anstatt $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ eingeschränkt, was $y \in]-1, 1[$ entspricht. Außerdem wurde hier

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

verwendet, wobei sich nur die positive Wurzel $+\sqrt{\dots}$ ergibt, da $\cos x > 0$ für $|x| < \frac{\pi}{2}$.

□

13.5 Einseitige Ableitungen

Benutzt man links- beziehungsweise rechtsseitige Grenzwerte in der Definition (13.1) der Ableitung, so erhält man einseitige Ableitungen:

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (13.11)$$

heißt *rechtsseitige Ableitung* von f in x_0 ,

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (13.12)$$

ist die *linksseitige Ableitung*. Dies sind die Definitionen der einseitigen Ableitung über den Differenzenquotienten. In vielen Fällen kann man die einseitigen Ableitungen auch als einseitige Grenzwerte der beiseitigen („normalen“) Ableitung berechnen: Ist f stetig in x_0 und differenzierbar für $x > x_0$ (bzw. $x < x_0$), dann gilt

$$\text{rechtsseitige Ableitung in } x_0 = \lim_{x \searrow x_0} f'(x), \quad (13.13)$$

$$\text{linksseitige Ableitung in } x_0 = \lim_{x \nearrow x_0} f'(x), \quad (13.14)$$

falls der jeweilige Grenzwert existiert.

Beachte: Die beidseitige Ableitung kann nur in *offenen* Intervallen gebildet werden! (Denn Definition 13.1.1 verwendet beidseitige Grenzwerte.) Ist z.B. $f(x)$ nur definiert für $x \geq a$, dann erhält man durch Ableiten nach den Ableitungsregeln zunächst nur die (beidseitige) Ableitung $f'(x)$ für $x > a$. Für die Stelle $x = a$ muss die einseitige (hier rechtsseitige) Ableitung betrachtet werden, entweder mit (13.11) oder (13.13).

Beispiel 13.5.1 (a) Wir untersuchen die Ableitung der Betragsfunktion

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Zunächst erhalten wir für $x > 0$ und $x < 0$ die normale, beidseitige Ableitung

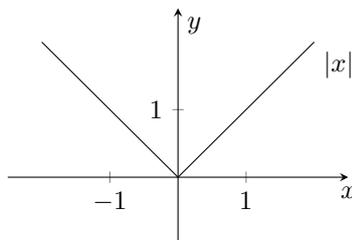
$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

(also auf den offenen Intervallen $] -\infty, 0[$ und $]0, \infty[$). In $x = 0$ muss die einseitige Ableitung betrachtet werden. Mit der Definition über den Differenzenquotienten (13.11), (13.12) ist

$$\begin{aligned}\lim_{x \searrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} &= \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \nearrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} &= \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1\end{aligned}$$

Die rechtsseitige Ableitung von f in $x = 0$ ist also 1, die linksseitige Ableitung ist -1 . Da die einseitigen Ableitungen (Grenzwerte des Differenzenquotienten) verschieden sind, ist die Funktion in $x = 0$ somit *nicht* (beidseitig) differenzierbar, $f'(0)$ existiert nicht. (Der beidseitige Grenzwert des Differenzenquotienten existiert nicht.)

Graphisch bedeuten die unterschiedlichen einseitigen Ableitungen, dass die Betragsfunktion an der Stelle in $x = 0$ einen Knick aufweist:



Offenbar ist die Steigung jeder Sekante im Bereich $x \geq 0$ gleich 1, und im Bereich $x \leq 0$ gleich -1 . Speziell erhält man in $x = 0$ von rechts die Steigung 1 und von links die Steigung -1 .

(b) Wir betrachten nun die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2}, & x > 1 \end{cases}$$

Auf den offenen Intervallen $] -\infty, 1[$ und $]1, \infty[$ ist f differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Ist f auch an der Stelle $x = 1$ differenzierbar, und wenn ja, was ist die Ableitung?

Wir prüfen zuerst, ob f an der Stelle $x = 1$ stetig ist (notwendige Bedingung für Differenzierbarkeit nach der Bemerkung auf Seite 178):

$$\begin{aligned}\lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{2}x^2 &= \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \searrow 1} \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \lim_{x \nearrow 1} f(x) &= \lim_{x \searrow 1} f(x) = f(1) \quad \Rightarrow \quad f \text{ stetig in } x = 1.\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit in $x = 1$ können wir die einseitigen Ableitungen jetzt mit den Formeln (13.13) und (13.14) berechnen: die linksseitige Ableitung ist

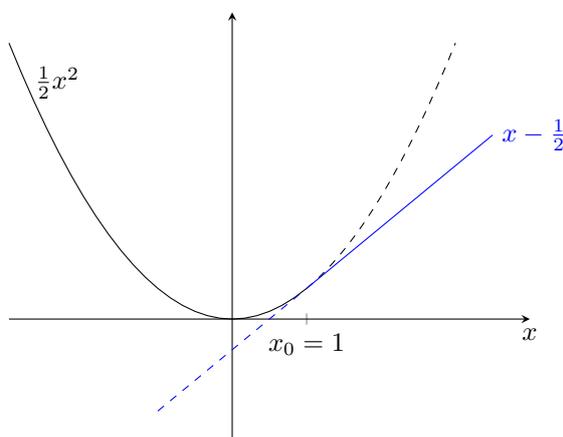
$$\lim_{x \nearrow 1} f'(x) = \lim_{x \nearrow 1} \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' = \lim_{x \nearrow 1} x = 1,$$

für die rechtsseitige Ableitung ergibt sich

$$\lim_{x \searrow 1} f'(x) = \lim_{x \searrow 1} \left(x - \frac{1}{2} \right)' = \lim_{x \searrow 1} 1 = 1.$$

Die einseitigen Ableitungen sind also gleich. f ist damit differenzierbar in $x = 1$, und die Ableitung ist $f'(1) = 1$.

Da die einseitigen Ableitungen in $x = 1$ gleich sind, hat der Graph von f an dieser Stelle keinen Knick:



13.6 Zeitableitungen

In Anwendung treten oft Funktionen auf, die von der Zeit t abhängen,

$$t \mapsto f(t).$$

In diesem Fall hat die Ableitung von f , also die *Ableitung nach der Zeit*, eine spezielle Bedeutung:

Betrachten wir zum Beispiel ein Körper, der sich bewegt. Sei

$$s = f(t)$$

die Strecke, die der Körpers zur Zeit t bereits zurückgelegt hat. Dann ist

$$\Delta s = f(t) - f(t_0)$$

die im Zeitintervall $[t_0, t]$ zurückgelegte Strecke, und der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

ist die durchschnittliche Geschwindigkeit im Intervall $[t_0, t]$. Die Ableitung $f'(t_0)$ ist der Grenzwert $t \rightarrow t_0$ des Differenzenquotienten und damit gleich der momentanen Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit t_0 :

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \text{Momentangeschwindigkeit zur Zeit } t_0.$$

Oft wird eine andere Bezeichnung für Zeitableitungen verwendet:

$$\dot{f}(t) = f'(t)$$

Allgemein beschreibt die Zeitableitung die momentane Änderung einer Größe $f(t)$:

$$\dot{f}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \text{momentane Änderungsrate von } f(t) \text{ zur Zeit } t_0$$

Weitere Beispiele aus der Anwendung sind

$$\begin{aligned} v(t) = \text{Geschwindigkeit} &\Rightarrow \dot{v}(t) = a(t) = \text{Beschleunigung} \\ Q(t) = \text{Ladung} &\Rightarrow \dot{Q}(t) = I(t) = \text{Stromstärke} \end{aligned}$$

13.7 Höhere Ableitungen

Ist die Funktion f differenzierbar auf dem Intervall $]a, b[$, so ist die Ableitung $f'(x)$ eine Funktion, die wieder für $x \in]a, b[$ definiert ist. Diese Ableitungsfunktion f' kann erneut differenzierbar sein. Die Ableitung von f' ist dann die *zweite Ableitung* von f , geschrieben als

$$f''$$

Entsprechend kann man noch höhere Ableitungen bilden:

$$f''', \quad f^{(4)}, \quad f^{(5)}, \dots$$

Man beachte die unterschiedliche Schreibweise ab der vierten Ableitung.

Beispiel 13.7.1 Wir berechnen die ersten drei Ableitungen von

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad x > 0.$$

Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Kapitel 14

Anwendungen der Differentialrechnung

In diesem Kapitel besprechen wir verschiedene Anwendungen der Ableitung von Funktionen. Neben den Methoden der Kurvendiskussion (Monotonie, Extremwerte, Krümmung und Wendepunkte) sind das die Regel von l'Hospital zur Berechnung von Grenzwerten sowie das Newtonverfahren zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen.

Hinweis: In den alten Mathematik A&B Skripten finden sie den Stoff dieses Kapitels im Skript Mathematik A, Kapitel 3.4.

14.1 Extremwerte

Definition 14.1.1 Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein *globales Extremum* falls

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in D \quad (\text{globales Maximum})$$

oder

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in D \quad (\text{globales Minimum}).$$

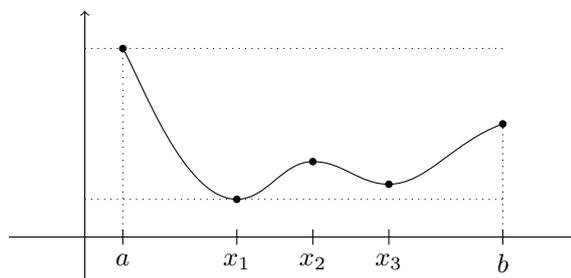
f hat in x_0 ein *lokales Extremum*, wenn es ein (kleines) offenes Intervall $]c, d[$ in D um x_0 gibt, d.h. $x_0 \in]c, d[\subset D$, mit

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in]c, d[\quad (\text{lokales Maximum})$$

oder

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in]c, d[\quad (\text{lokales Minimum}).$$

Ein *globales Maximum* zum Beispiel ist somit der größte Funktionswert von f auf dem ganzen Definitionsbereich, während ein *lokales Maximum* nur in einer (eventuell kleinen) Umgebung der größte Wert ist. Ist die Funktion f etwa auf dem Intervall $[a, b]$ definiert und hat dort den folgenden Graphen,



dann sind

- globale Minima: x_1
- globale Maxima: a
- lokale Minima: x_1, x_3
- lokale Maxima: x_2

(Die Randpunkte des Intervalls a und b sind keine lokalen Maxima nach der Definition, weil es kein offenes Intervall um a bzw. b gibt, das im Definitionsbereich $[a, b]$ von f liegt.)

Bemerkung: Eine Funktion kann mehrere globale Maxima und Minima haben. Zum Beispiel hat $f(x) = x^2$ mit dem Definitionsbereich $D = [-2, 2]$ zwei globale Maxima bei $x = -2$ und $x = 2$.

Für globale Extrema gilt:

Satz 14.1.2 *Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ($a, b \in \mathbb{R}$) dann hat f auf $[a, b]$ ein globales Maximum und Minimum.*

Satz 14.1.2 ist anschaulich klar, weil die stetige Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ keine Sprungstellen hat. Wichtig ist hier aber, dass das Intervall $[a, b]$ abgeschlossen und beschränkt ist. So hat zum Beispiel die stetige Funktion $f(x) = 1/x$ auf $]0, 1]$ kein globales Maximum, denn die Funktionswerte werden nahe bei 0 beliebig groß.

Mit dem nächsten Satz können wir *mögliche* lokale Extremstellen mithilfe der Ableitung berechnen.

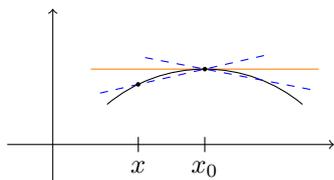
Satz 14.1.3 (notwendiges Kriterium für lokale Extrema) *Die Funktion $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Dann gilt:*

$$f \text{ hat in } x_0 \text{ ein lokales Extremum} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0.$$

Beweis. Es ist grafisch plausibel, dass f in einem lokalen Extremum x_0 eine waagerechte Tangente haben muss. Ist zum Beispiel x_0 ein lokales Maximum, dann haben Sekanten „von links“, d.h. für $x < x_0$, eine Steigung ≥ 0 :

$$x < x_0 \wedge f(x) \leq f(x_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

vergleiche die folgende Skizze.



Im Grenzwert $x \nearrow x_0$ muss daher auch die Tangente in x_0 eine Steigung ≥ 0 haben. Genauso haben Sekanten von rechts, d.h. mit $x > x_0$, eine Steigung ≤ 0 ,

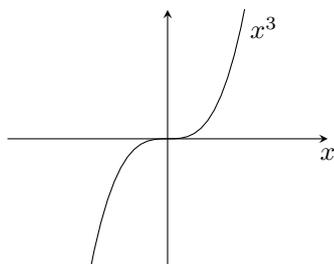
$$x > x_0 \wedge f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Also muss ($x \searrow x_0$) die Steigung der Tangente in x_0 auch ≤ 0 sein. Insgesamt muss die Steigung der Tangente daher gleich Null sein, d.h. $f'(x_0) = 0$. \square

Bemerkung: Das Kriterium ist nicht hinreichend:

$$f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0 \text{ lokales Extremum!}$$

Ein Gegenbeispiel ist etwa die Funktion $f(x) = x^3$:



Dafür ist

$$f'(x) = 3x^2, \quad f'(0) = 0,$$

aber $x_0 = 0$ ist offenbar kein lokales Extremum.

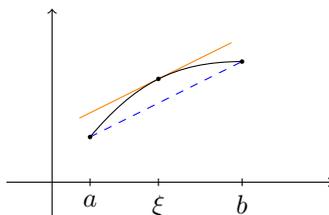
14.2 Monotonie

Da die Ableitung die Steigung der Tangenten an die Funktion angibt, ist es naheliegend, dass man aus der Ableitung Aussagen über die Monotonie der Funktion machen kann. Ein Hilfsmittel dazu ist der folgende *Mittelwertsatz*:

Satz 14.2.1 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Sei f differenzierbar auf $[a, b]$. Dann gibt es (mindestens) ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \quad (14.1)$$

Grafisch bedeutet der Mittelwertsatz das Folgende:



Die Steigung der Sekante (blau gestrichelt) durch a und b ist

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Es gibt dann eine Stelle ξ , an der die Tangente (orange) an die Funktion parallel zur Sekante ist, die Steigung $f'(\xi)$ der Tangente also gleich der Sekantensteigung ist, d.h. (14.1) gilt.

Satz 14.2.2 (Monotonie) Sei f differenzierbar auf $[a, b]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \text{ auf }]a, b[&\Rightarrow f \text{ monoton wachsend auf } [a, b] \\ f'(x) > 0 \text{ auf }]a, b[&\Rightarrow f \text{ streng monoton wachsend auf } [a, b] \\ f'(x) \leq 0 \text{ auf }]a, b[&\Rightarrow f \text{ monoton fallend auf } [a, b] \\ f'(x) < 0 \text{ auf }]a, b[&\Rightarrow f \text{ streng monoton fallend auf } [a, b] \\ f'(x) = 0 \text{ auf }]a, b[&\Rightarrow f \text{ konstant auf } [a, b] \end{aligned}$$

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$. Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

für ein $\xi \in]x_1, x_2[$. Da $x_2 - x_1 > 0$ erhalten wir somit

$$\begin{aligned} f'(\xi) \geq 0 &\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0 &\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \\ f'(\xi) > 0 &\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

und so weiter für die anderen Fälle. □

Bemerkung: Da im Mittelwertsatz $\xi \in]a, b[$ gilt, langt es in Satz 14.2.2 die Bedingung an $f'(x)$ nur auf dem offenen Intervall $]a, b[$ zu fordern, und man bekommt trotzdem die Monotonieaussage auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Ist zum Beispiel $f'(x) > 0$ für $x \in]0, 1[$ und $f'(0) = 0$, dann ist f streng monoton wachsend auf $[0, 1]$. (Eine konkrete Funktion mit diesen Eigenschaften ist $f(x) = x^2$.)

14.3 Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema

Nach Satz 14.1.3 sind die Nullstellen der Ableitung, also alle Stellen x_0 mit $f'(x_0) = 0$, die möglichen lokalen Extremstellen einer differenzierbaren Funktion. Wir betrachten jetzt zwei hinreichende Kriterien für Extrema, mit denen man also schließen kann, dass eine bestimmte Stelle x_0 tatsächlich ein Extremum ist, und auch, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

Satz 14.3.1 (Vorzeichenwechselkriterium) Sei $f'(x_0) = 0$ und sei $a < x_0 < b$ so dass $[a, b] \subset D_f$.

(i) Falls

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{auf }]a, x_0[\text{ und} \\ f'(x) > 0 & \text{auf }]x_0, b[, \end{cases}$$

dann hat f in x_0 ein lokales Minimum.

(ii) Falls

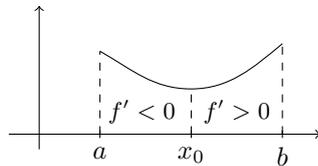
$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{auf }]a, x_0[\text{ und} \\ f'(x) < 0 & \text{auf }]x_0, b[, \end{cases}$$

dann hat f in x_0 ein lokales Maximum.

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Satz 14.2.2 über die Monotonie. Im Fall (i) z.B. gilt

$$\begin{aligned} \text{auf }]a, x_0[: \quad f'(x) < 0 &\Rightarrow f \text{ streng monoton fallend,} \\ \text{auf }]x_0, b[: \quad f'(x) > 0 &\Rightarrow f \text{ streng monoton wachsend.} \end{aligned}$$

Also hat f in x_0 ein lokales Minimum. Anschaulich:



□

Wichtig: Für das Vorzeichenwechselkriterium muss $[a, b] \subset D_f$ gelten, das heißt in $[a, b]$ darf keine Definitionslücke liegen! Anders gesagt müssen bei der Untersuchung des Vorzeichens von f' die Definitionslücken mit betrachtet werden.

Beispiel 14.3.2 (a) Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = (3 - x)\sqrt{1 + x^2}, \quad D_f = \mathbb{R},$$

auf lokale Extrema sowie Monotonie. Die Funktion hat keine Definitionslücken. Die erste Ableitung ist (Produkt- und Kettenregel)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sqrt{1 + x^2} + \frac{3 - x}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x = \frac{-(1 + x^2) + (3 - x) \cdot x}{\sqrt{1 + x^2}} \\ &= \frac{-2x^2 + 3x - 1}{\sqrt{1 + x^2}}. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Wir berechnen die möglichen Extremstellen:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -2x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{9}{16} = \frac{1}{16} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Für den Zähler ergibt dies die Faktorisierung

$$-2x^3 + 3x - 1 = -2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

und damit

$$f'(x) = \frac{-2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (14.3)$$

Hieraus lassen sich nun die Vorzeichen von f' in den Intervallen zwischen den Nullstellen von f' , also in $] -\infty, \frac{1}{2}[$, $]\frac{1}{2}, 1[$ und $]1, \infty[$, bestimmen. Daraus ergeben sich dann Monotonie und Extrema von f gemäß Satz 14.2.2 und 14.3.1:

x	$x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
f	str. mon. fallend	lok. Min.	wachsend	lok. Max.	fallend

Die Vorzeichen von f' in den drei Intervallen lassen sich zum Beispiel aus der Faktorisierung (14.3) von f' bestimmen, etwa

$$\frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{-2 \overbrace{(x-1)}^{<0} \overbrace{\left(x - \frac{1}{2}\right)}^{>0}}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

Eine andere Möglichkeit ist die Auswertung von $f'(x)$ an einer Stelle des Intervalls. Zum Beispiel ist $f'(0) = -1 < 0$ und daher auch $f'(x) < 0$ für alle $x < \frac{1}{2}$. (Denn sonst müsste f' noch eine Nullstelle $x_0 < \frac{1}{2}$ haben, aber die einzigen Nullstellen waren $\frac{1}{2}$ und 1.) Schließlich kann man in diesem Beispiel auch benutzen, dass der Zähler in (14.2) eine nach unten geöffnete Parabel ist und damit positiv zwischen den beiden Nullstellen und negativ außerhalb; und f' hat dieselben Vorzeichen, da der Nenner $\sqrt{1+x^2}$ immer positiv ist.

Das Ergebnis ist zusammengefasst:

- f ist streng monoton fallend auf $] -\infty, \frac{1}{2}]$ und $[1, \infty[$ sowie streng monoton wachsend auf $[\frac{1}{2}, 1]$.
- f hat ein lokales Minimum in $x = \frac{1}{2}$ und ein lokales Maximum in $x = 1$.

(b) Das zweite Beispiel ist

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Die Funktion hat eine Definitionslücke in $x = 0$, die wir gleich beim Vorzeichenwechselkriterium berücksichtigen müssen. Zuerst berechnen wir wieder die möglichen Extremstellen aus $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3 + 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{3x^3 - (x^3 + 1) \cdot 2}{x^3} = \frac{x^3 - 2}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

Um nun die Definitionslücke zu berücksichtigen, nehmen wir sie mit in die Vorzeichentabelle auf:

x	$x < 0$	0	$0 < x < \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$x > \sqrt[3]{2}$
$f'(x)$	+	nicht def.	-	0	+
f	wachsend	—	fallend	lok. Min.	wachsend

Die Vorzeichen ergeben sich z.B. aus

$$x < 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{\overbrace{x^3 - 2}^{<0}}{\underbrace{x^3}_{<0}} > 0, \quad 0 < x < \sqrt[3]{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\overbrace{x^3 - 2}^{<0}}{\underbrace{x^3}_{>0}} < 0, \dots$$

Alternativ kann man wieder konkrete Zahlen einsetzen, z.B. $f'(-1) = \dots = 3 > 0$ für $x < 0$ und $f'(1) = \dots = -1 < 0$ für $0 < x < \sqrt[3]{2}$.

Hier ist das Ergebnis also

- f ist streng monoton wachsend auf $] - \infty, 0[$ und $[\sqrt[3]{2}, \infty[$ sowie streng monoton fallend auf $]0, \sqrt[3]{2}[$.
- f hat ein lokales Minimum in $x = \sqrt[3]{2}$.

Das zweite hinreichende Kriterium für lokale Extrema benutzt die zweite Ableitung:

Satz 14.3.3 (Kriterium mit f'') Sei f zweimal stetig differenzierbar. (Das heißt, f ist zweimal differenzierbar und f'' ist stetig.) Sei $f'(x_0) = 0$. Dann gilt:

$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ hat in } x_0 \text{ ein lokales Minimum}$$

$$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ hat in } x_0 \text{ ein lokales Maximum}$$

Beweis. Sei z.B. $f''(x_0) > 0$. Da f'' stetig ist, gilt dann $f''(x) > 0$ auf einem ganzen Intervall $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ um x_0 ($\varepsilon > 0$ klein genug). Die Ableitung von f' ist also positiv auf dem Intervall. Aus Satz 14.2.2 (angewandt auf f' anstatt f) folgt, dass f' streng monoton wachsend ist auf $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. Wegen $f'(x_0) = 0$ ist damit

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{auf }]x_0 - \varepsilon, x_0[\\ > 0 & \text{auf }]x_0, x_0 + \varepsilon[\end{cases}$$

Nach dem Vorzeichenwechselkriterium ist somit x_0 ein lokales Minimum. □

Bemerkung: Der Nachteil des Kriteriums mit f'' ist, dass es in manchen Fällen keine Aussage liefert, nämlich dann, wenn auch $f''(x_0) = 0$ ist. In solchen Fällen kann x_0 ein lokales Extremum sein, es kann aber auch sein, dass es kein Extremum ist. Beispiele dafür sind die Funktionen $f(x) = x^3$ und $f(x) = x^4$, oder allgemeiner $f(x) = x^n$ für jede ungerade bzw. gerade Zahl $n > 2$. Das Vorzeichenwechselkriterium liefert auch in solchen Fällen (meist) eine Aussage.

Ein weiterer Vorteil beim Vorzeichenwechselkriterium ist, dass die zweite Ableitung nicht berechnet und ausgewertet werden muss. Je nach Funktion kann das recht aufwändig sein.

14.4 Berechnung globaler Extrema

Hat die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ein globales Extremum x_0 im *inneren* des Intervalls (also $x_0 \neq a, b$), dann muss es gleichzeitig auch ein lokales Extremum sein. Die globalen Extrema einer Funktion gehören also entweder zu den lokalen Extrema, oder sie sind Randpunkte des Definitionsbereichs. Zur Berechnung globaler Extrema geht man deshalb wie folgt vor:

- (i) Berechne lokale Extrema.
- (ii) Berechne die Funktionswerte bzw. das Verhalten von f am Rand des Definitionsbereiches (inklusive Definitionslücken!) und bestimme daraus die größten und kleinsten Funktionswerte (falls es sie gibt).

Wir erläutern das an einem Beispiel.

Beispiel 14.4.1 Wir betrachten die Funktion

$$f : [-\frac{1}{2}, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 3x^2.$$

Wir berechnen zunächst die lokalen Extrema und verwenden dafür (zur Abwechslung) das Kriterium mit f'' .

$$\begin{aligned} f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \\ f''(x) = 6x - 6, \quad f''(0) = -6 < 0 &\Rightarrow x = 0 \text{ lokales Maximum} \\ f''(2) = 6 > 0 &\Rightarrow x = 2 \text{ lokales Minimum} \end{aligned}$$

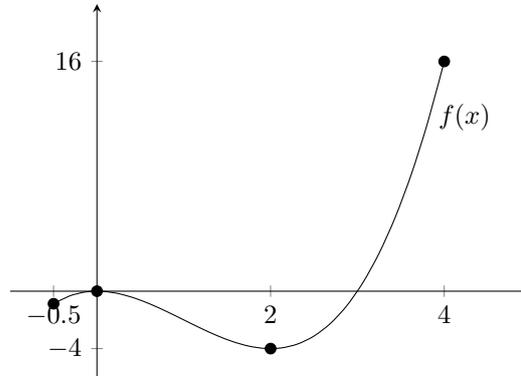
Wir berechnen jetzt die Werte von $f(x)$ an den lokalen Extremstellen und an den Rändern des Definitionsintervalls $[-\frac{1}{2}, 4]$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \quad f(2) = 8 - 12 = -4 \\ f(-\frac{1}{2}) &= -\frac{1}{8} - \frac{3}{4} = -\frac{7}{8} \\ f(4) &= 4^3 - 3 \cdot 4^2 = (4 - 3) \cdot 4^2 = 16 \end{aligned}$$

Der größte Funktionswert ist also $y = 16$ an der Stelle $x = 4$, der kleinste Wert ist $y = -4$ bei $x = 2$. D.h. f hat ein

- globales Maximum bei $x = 4$,
- globales Minimum bei $x = 2$.

Wir verdeutlichen die Ergebnisse unserer Rechnung noch grafisch:

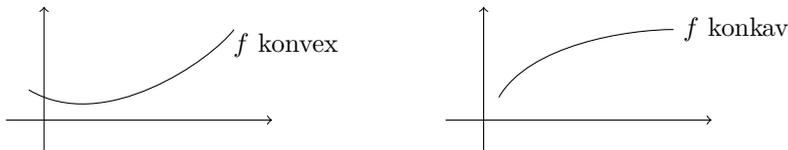


14.5 Krümmung und Wendepunkte

So wie die erste Ableitung $f'(x)$ die Steigung einer Funktion an jeder Stelle beschreibt, beschreibt die zweite Ableitung die Krümmung von f . Zuerst definieren wir die zwei Arten der Krümmung:

Definition 14.5.1 Die Funktion f heißt *konvex*, wenn der Graph von f linksgekrümmt ist, und *konkav*, wenn der Graph rechtsgekrümmt ist.

Anschaulich heißt das:



Das Vorzeichen der zweiten Ableitung bestimmt die Krümmung:

Satz 14.5.2 Sei f zweimal differenzierbar auf $]a, b[$.

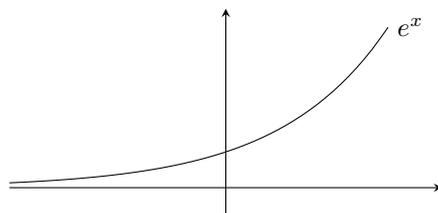
$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \text{ auf }]a, b[&\Rightarrow f \text{ konvex auf } [a, b] \\ f''(x) < 0 \text{ auf }]a, b[&\Rightarrow f \text{ konkav auf } [a, b] \end{aligned}$$

Beweis. Anwendung von Satz 14.2.2 auf f' liefert

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \text{ auf }]a, b[&\Rightarrow f' \text{ streng monoton wachsend auf } [a, b] \\ f''(x) < 0 \text{ auf }]a, b[&\Rightarrow f' \text{ streng monoton fallend auf } [a, b] \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die behauptete Krümmung, denn wenn $f'(x)$ wächst, die Steigung also größer wird, dann ist f konvex; und wenn $f'(x)$ fällt, d.h. die Steigung kleiner wird, so ist f konkav. (Vergleich dazu die Skizzen zu konvex und konkav oben.) \square

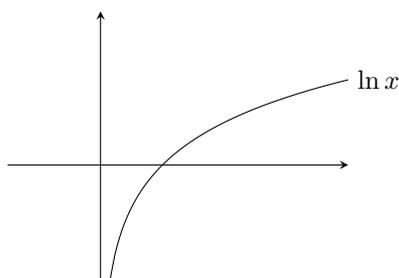
Beispiel 14.5.3 Für $f(x) = e^x$ gilt $f''(x) = e^x > 0$. Die Exponentialfunktion e^x ist also nach Satz 14.5.2 konvex.



Für $f(x) = \ln x$ ist

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

also ist der Logarithmus $\ln x$ konkav.



Definition 14.5.4 f hat in x_0 einen *Wendepunkt*, wenn f in x_0 die Krümmung wechselt.

Satz 14.5.5 (Vorzeichenwechselkriterium für Wendepunkte)

Gilt $f''(x_0) = 0$ und wechselt $f''(x)$ bei x_0 das Vorzeichen, dann ist x_0 ein Wendepunkt.

Beweis. Der Satz folgt direkt aus der Definition eines Wendepunkts und dem Vorzeichenkriterium für die Krümmung Satz 14.5.2 \square

Beispiel 14.5.6 Wir wollen die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$$

auf Krümmung und Wendepunkte untersuchen. Wir berechnen zunächst die zweite Ableitung und ihre Nullstellen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -x^2 + 2x, & f''(x) &= -2x + 2 \\ f''(x) &= 0 & \Leftrightarrow & x = 1 \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun das Vorzeichen von f'' links und rechts von $x = 1$ und daraus dann Krümmung und Wendepunkte:

x	$x < 1$	1	$x > 1$
$f''(x)$	+	0	-
f	konvex	Wendepunkt	konkav

Somit gilt:

- f ist konvex auf $] -\infty, 1]$
- f ist konkav auf $[1, \infty[$
- f hat Wendepunkt in $x_0 = 1$

Analog zu den lokalen Extrema gibt es auch für Wendepunkte ein hinreichendes Kriterium mit der nächst höheren Ableitung:

Satz 14.5.7 (Kriterium für Wendepunkte mit f''') Sei f dreimal stetig differenzierbar. Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 ein Wendepunkt.

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 14.3.3. □

14.6 Kurvendiskussion

Wir haben an dieser Stelle alle Mittel und Methoden kennengelernt, mit denen sich eine vollständige Kurvendiskussion einer Funktion durchführen lässt. Wir fassen hier all diese Methoden noch einmal zusammen. In „echten“ Anwendungen ist es allerdings oft so, dass nicht alle Schritte durchgeführt werden müssen, weil nur bestimmte Eigenschaften einer Funktion interessieren.

- (1) Definitionsbereich von f ; Stellen, in denen f nicht stetig ist
- (2) Symmetrie, Periodizität von f
- (3) Nullstellen von f
- (4) Ableitungen f' , f'' und (eventuell) f''' ; Stellen, in denen f nicht differenzierbar ist
- (5) Monotonie und Extrema
- (6) Krümmung und Wendepunkte
- (7) asymptotisches Verhalten an Definitionslücken und am Rand des Definitionsbereiches
- (8) Skizze der Funktion

14.7 Der Satz von l'Hospital

Mit dem Satz von l'Hospital ist es möglich, Grenzwerte der Form

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

in den Fällen zu berechnen, die auf „ $\frac{0}{0}$ “ oder „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ führen, wo also die Grenzwertrechenregel für Quotienten aus Satz 11.2.1 nicht anwendbar ist.

Satz 14.7.1 (Satz von l'Hospital) Sei entweder

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

Sei $g'(x) \neq 0$ für $x \neq a$, $|x - a|$ klein. Wenn dann $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, d.h. der Grenzwert ist ein Zahl $y \in \mathbb{R}$, oder ∞ oder $-\infty$, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (14.4)$$

Die Aussage gilt genauso für einseitige Grenzwerte $x \nearrow a$, $x \searrow a$ sowie bei $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$.

Der Satz von l'Hospital sagt also, dass man beim Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in den Fällen $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ Zähler und Nenner ableiten darf und dann den Grenzwert mit (14.4) berechnen kann.

Achtung!

Führt der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ nicht auf $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$, dann kann l'Hospital nicht angewandt werden. Man muss (und kann) dann stattdessen den Grenzwert „normal“ über die Rechenregeln für Grenzwerte (Satz 11.2.1) bestimmen.

Beweis l'Hospital, einfachster Fall. Sei $a \in \mathbb{R}$. Bei $x \rightarrow a$ gelte

$$\begin{aligned} f(x) \rightarrow f(a) = 0, \quad g(x) \rightarrow g(a) = 0, \\ f'(x) \rightarrow u, \quad g'(x) \rightarrow v \neq 0. \end{aligned}$$

Hier führt also $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ auf $\frac{0}{0}$, und $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{u}{v} \in \mathbb{R}$ existiert. Nach dem Mittelwertsatz 14.2.1 gilt

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= (x - a) \cdot f'(\xi) \\ g(x) - g(a) &= (x - a) \cdot g'(\eta) \end{aligned}$$

wobei ξ, η zwischen a und x liegen, und von x abhängig sind. Wegen $f(a) = g(a) = 0$ folgt dann

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x - a)f'(\xi)}{(x - a)g'(\eta)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\eta)} \rightarrow \frac{u}{v} \quad \text{bei } x \rightarrow a,$$

denn aus $x \rightarrow a$ folgt $\xi \rightarrow a$, $\eta \rightarrow a$ da ξ und η zwischen a und x liegen. \square

Bemerkung:

- (a) Wenn $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ wieder $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ergibt, kann der Satz von l'Hospital nochmal angewandt werden (auf $\frac{f'(x)}{g'(x)}$). Dies kann wenn nötig solange wiederholt werden, bis der Grenzwert ausgerechnet werden kann.

- (b) Grenzwerte der Form $\infty - \infty$ und $0 \cdot \infty$, die sich ebenfalls nicht mit den Grenzwertrechenregeln bestimmen lassen, kann man häufig auf die Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ umformen und dann mit l'Hospital berechnen.

Beispiel 14.7.2 (a) Wir wollen

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sqrt{x} - 1}$$

berechnen. Für $x \rightarrow 1$ ist

$$\ln x \rightarrow \ln 1 = 0, \quad \sqrt{x} - 1 \rightarrow \sqrt{1} - 1 = 0,$$

wir haben also den Fall „ $\frac{0}{0}$ “. Wir können daher l'Hospital anwenden und erhalten

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

- (b) Der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0$$

führt auf $\infty \cdot 0$ (denn $\alpha > 0 \Rightarrow -\alpha x \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{-\alpha x} \rightarrow 0$). Wir können den Grenzwert als Quotient schreiben (Fall „ $\frac{\infty}{\infty}$ “) und dann mehrmals l'Hospital anwenden (bis sich nicht mehr „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ ergibt):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-\alpha x} &\stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{\alpha x}} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{\alpha x^{\alpha x}} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{\alpha^2 e^{\alpha x}} \\ &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\alpha^3 e^{\alpha x}} = 0. \end{aligned}$$

(Beachte $e^{\alpha x} \rightarrow \infty$ da $\alpha > 0$.)

Offenbar ist diese Rechnung auch für beliebige Potenzen x^n ($n \geq 1$) möglich. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-\alpha x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{\alpha x}} = 0 \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}^*, \alpha > 0.$$

(Zur Berechnung des Grenzwerts n -mal l'Hospital anwenden.) Man kann daher sagen:

$e^{\alpha x}$ (mit $\alpha > 0$) wächst schneller als jede Potenz x^n

- (c) Was ist der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \quad ?$$

Da $\sin x \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$ führt dieser Grenzwert auf den Fall „ $\infty - \infty$ “. Indem wir die Differenz als einen Bruch schreiben, können wir das auf den Fall „ $\frac{0}{0}$ “ umformen und damit wieder l'Hospital anwenden und den Grenzwert so berechnen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \cdot \sin x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

Als eine Anwendung des Satzes von l'Hospital berechnen wir jetzt eine Darstellung der Exponentialfunktion durch einen Grenzwert.

Beispiel 14.7.3 Wir wollen zeigen, dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x. \quad (14.5)$$

Man beachte, dass hier x eine feste Zahl ist und der Grenzwert $n \rightarrow \infty$ betrachtet werden soll. Das Problem bei diesem Grenzwert ist, dass die Variable n sowohl in der Klammer als auch im Exponent vorkommt. Für solch einen Ausdruck ist keine der Rechenregeln für Grenzwerte aus Kapitel 11 anwendbar. Wir müssen daher hier zunächst wieder umformen, um einen Ausdruck zu erhalten, den man dann mit l'Hospital berechnen kann. Wir schreiben dazu die Potenz mithilfe von (4.11) als Verkettung von Exponential- und Logarithmusfunktion:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$$

Der Grenzwert des Logarithmus-Terms ist

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \rightarrow \ln(1) = 0 \quad \text{bei } n \rightarrow \infty.$$

Das Produkt in der Exponentialfunktion führt daher auf „ $\infty \cdot 0$ “, was wir auf „ $\frac{0}{0}$ “ umformen, um dann l'Hospital anzuwenden:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) &\stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{x}{n}} \cdot \left(-\frac{x}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{x}{n}} = x \end{aligned}$$

Beachte, dass bei l'Hospital nach n abzuleiten ist, da wir den Grenzwert $n \rightarrow \infty$ betrachten (x ist hier konstant). Mit dem Zwischenergebnis können wir jetzt den gesuchten Grenzwert berechnen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\exp\left(n \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)}_{\rightarrow x} = \exp(x) = e^x.$$

Für $x = 1$ erhalten wir speziell die Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (14.6)$$

Diese Formel gibt uns eine Möglichkeit, die Eulersche Zahl e näherungsweise zu berechnen, indem man nämlich $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für immer größere n berechnet. (Probieren Sie es aus!)

14.8 Das Newtonverfahren

Das Newtonverfahren dient der näherungsweisen Berechnung von Nullstellen. Im Gegensatz zum „Intervallhalbierungsverfahren“ aus Abschnitt 11.5 ist mit

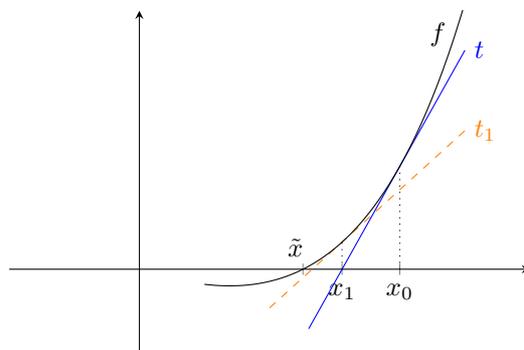


Abbildung 14.1: Das Newtonverfahren zur Nullstellenberechnung

dem Newtonverfahren eine sehr schnelle und genaue Berechnung von Nullstellen möglich. Voraussetzung dabei ist allerdings, dass man einen guten Startwert hat, der ausreichend nah an der exakten Nullstelle liegt.

Die Idee des Newtonverfahrens ist, die Funktion f in einem Punkt x_0 , der schon in der Nähe der exakten Nullstelle \tilde{x} liegt, durch ihre Tangente t zu ersetzen, siehe Abbildung 14.1. Da die Tangente in der Nähe von x_0 nur wenig von der Funktion abweicht, sollte die Nullstelle x_1 von t eine gute Annäherung an die Nullstelle \tilde{x} von f sein.

Die Tangente an f in x_0 ist

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Für die Nullstelle x_1 der Tangente ergibt sich damit

$$\begin{aligned} 0 &= t(x_1) = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \\ \Rightarrow x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

Das Verfahren lässt sich nun mit x_1 anstelle von x_0 wiederholen (Iteration): Die Nullstelle der Tangente t_1 in x_1 , also

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

wird eine bessere Näherung für \tilde{x} sein, vergleiche Abbildung 14.1. Aus x_2 kann man dann entsprechend x_3 berechnen, u.s.w. Das ist das

Newtonverfahren. Ausgehend von einem Startwert x_0 berechne rekursiv die Zahlen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (14.7)$$

Das Newtonverfahren liefert also eine Folge von Zahlen x_0, x_1, x_2, \dots , die im günstigen Fall sehr schnell gegen die Nullstelle \tilde{x} von f konvergiert. Das besagt der nächste Satz:

Satz 14.8.1 (quadratische Konvergenz des Newtonverfahrens)

Sei \tilde{x} eine Nullstelle von f , für die zusätzlich $f'(\tilde{x}) \neq 0$ gilt. Sei x_0 ein gewählter Startwert für das Newtonverfahren. Ist der Anfangsabstand $|x_0 - \tilde{x}|$ zur Nullstelle klein genug, dann konvergiert x_n quadratisch gegen \tilde{x} , das heißt es gilt

$$|x_{n+1} - \tilde{x}| \leq c \cdot |x_n - \tilde{x}|^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14.8)$$

Der Abstand (Fehler) $|x_n - \tilde{x}|$ zwischen Näherungswert und exakter Nullstelle nimmt also quadratisch ab.

Ist der Anfangsabstand $|x_0 - \tilde{x}|$ dagegen zu groß, dann kann die Konvergenz langsam sein, oder die x_n konvergieren gar nicht gegen die Nullstelle. Wir verdeutlichen das am nächsten Beispiel:

Beispiel 14.8.2 Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = -3x^3 + x + 1.$$

Dieses Polynom hat keine rationalen Nullstellen. (Denn nach Satz 12.3.1 wären $\pm 1, \pm \frac{1}{3}$ die einzig möglichen rationalen Nullstellen; davon ist aber keine eine Nullstelle.) Wegen $f(0) = 1$ und $f(1) = -1$ hat die Funktion aber zumindest eine Nullstelle \tilde{x} im Intervall $]0, 1[$ (da f stetig, vergleiche 11.5). Wir versuchen jetzt diese Nullstelle mit dem Newtonverfahren zu berechnen.

Es gilt $f'(x) = -9x^2 + 1$. Die Rekursionsformel (14.7) lautet damit hier

$$x_{n+1} = x_n - \frac{-3x_n^2 + x_n + 1}{-9x_n^2 + 1}.$$

Wählen wir als Startwert $x_0 = 1$ (rechter Randpunkt von $]0, 1[$), so erhalten wir die Werte

n	x_n	$ x_n - \tilde{x} $
0	1	$\approx 1.4 \cdot 10^{-1}$
1	0.875	$2.4 \cdot 10^{-2}$
2	0.8521...	$7.4 \cdot 10^{-4}$
3	0.85138382...	$7.6 \cdot 10^{-7}$
4	0.8513830728677...	$7.9 \cdot 10^{-13}$

Man sieht, dass schon nach nur vier Iterationen die ersten sechs(!) Nachkommastellen fest sind. Vergleicht man die x_n mit dem exakten Wert der Nullstelle¹

$$\tilde{x} = 0.85138307286692\dots,$$

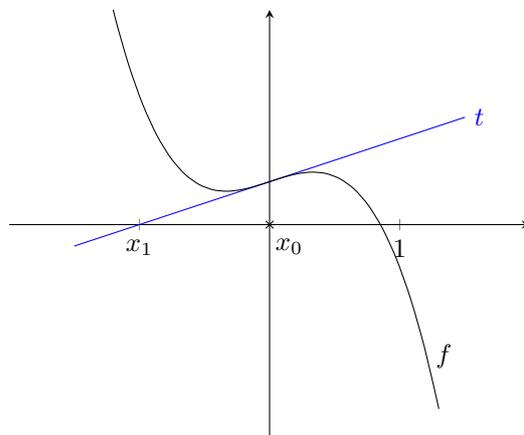
sieht man, dass bei x_1 eine Nachkommastelle richtig ist, bei x_2 zwei Stellen, bei x_3 schon 6 Stellen und bei x_4 sogar 11. Die Anzahl der richtigen Stellen verdoppelt sich also (ungefähr) mit jedem Schritt. Das ist die quadratische Konvergenz. Wir haben in der Tabelle auch den Abstand $|x_n - \tilde{x}|$ zur Nullstelle mit angegeben. An der Verdopplung der Exponenten (wieder ungefähr: $-1, -2, -4, -7, -13$) erkennt man auch hier die quadratische Konvergenz. Diese Verdopplung der Exponenten entspricht genau der Formel (14.8), die hier erfüllt ist mit $c = 1.5$.

Wir probieren jetzt noch den Startwert $x_0 = 0$ aus (linke Intervallgrenze):

¹Tatsächlich wurde dieser „exakte“ Wert der Nullstelle mit dem Newtonverfahren berechnet! In der numerischen Berechnung stoppt die Iteration wegen der begrenzten Rechengenauigkeit nach endlich vielen Schritten, das heißt die Zahlen x_n ändern sich dann nicht mehr.

n	x_n
0	0
1	-1
2	-0.625
3	-0.184...
4	-1.38...
5	-0.92...
\vdots	
10	-0.189
\vdots	
15	-1.04

Man sieht, dass die Werte hier nicht konvergieren. Der Grund ist, dass der Startwert $x_0 = 0$ „zu weit“ von der Nullstelle \tilde{x} entfernt ist. Warum $x_0 = 0$ zu weit weg ist sieht man genauer, wenn man den Graphen von f zeichnet:



Die Tangente t in $x_0 = 0$ hat positive Steigung, daher ist ihre Nullstelle x_1 negativ. Die Newton-Iteration geht deshalb von x_0 aus in die falsche Richtung nach links, und nicht nach rechts zur Nullstelle von f . Und jedesmal, wenn die Newton-Folge mit einem x_n wieder so nah nach 0 zurückkommt, dass die Steigung von f dort positiv ist, liegt der nächste Wert x_{n+1} wieder weiter im Negativen.

Kapitel 15

Integralrechnung

Die Integralrechnung stellt zum einen das Gegenstück der Differentialrechnung dar, indem das *unbestimmte* Integral die Ableitung einer Funktion wieder rückgängig macht. Zum anderen erlaubt das *bestimmte* Integral die Berechnung von Flächeninhalten, hat aber darüberhinaus eine zentrale Bedeutung in vielen Anwendungsbereichen, etwa der Physik (Berechnung von Arbeit, Energie, elektrischem Potential, Gesamtladung einer Ladungsverteilung, u.s.w.). Integrale werden also bei weitem nicht nur zur Berechnung von Flächeninhalten benutzt!

Hinweis: In den alten Mathematik A&B Skripten finden sie den Stoff dieses Kapitels im Skript Mathematik B, Kapitel 3.

15.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Definition 15.1.1 Betrachte $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. Eine differenzierbare Funktion $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f wenn gilt

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in]a, b[. \quad (15.1)$$

Stammfunktionen sind nicht eindeutig: Sei nämlich F eine Stammfunktion von f und sei

$$G(x) = F(x) + c$$

mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$G'(x) = F'(x) = f(x),$$

also ist auch G eine Stammfunktion von f . Seien andersherum F und G zwei Stammfunktionen von f . Dann ist

$$\begin{aligned} (G(x) - F(x))' &= G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \\ \Rightarrow G(x) - F(x) &= c \text{ konstant} \quad (\text{Satz 14.2.2!}) \\ \Rightarrow G(x) &= F(x) + c \end{aligned}$$

Wir haben damit nachgerechnet:

Satz 15.1.2 Ist F eine Stammfunktion von f , dann erhält man durch

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ konstant,}$$

alle Stammfunktionen von f .

Anders gesagt sind also Stammfunktionen nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Das *unbestimmte Integral* einer Funktion $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad (15.2)$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist und $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Das unbestimmte Integral $\int f(x) dx$ ist somit die allgemeine Stammfunktion von f . Kurz:

Unbestimmtes Integral und Stammfunktion sind die Umkehrung der Ableitung.

Bei der Berechnung der Stammfunktion F suchen wir eine Funktion, deren Ableitung wieder die Ausgangsfunktion f ist. Wir zeigen das an folgenden einfachen Beispielen:

Beispiel 15.1.3 (a) Für $f(x) = -3x$ ist $F(x) = -\frac{3}{2}x^2$ eine Stammfunktion, denn es gilt

$$F'(x) = -\frac{3}{2} \cdot 2x = -3x.$$

Der Faktor $-\frac{3}{2}$ in $F(x)$ wurde dabei genau so gewählt, dass er die 2 in der Ableitung $2x$ von x^2 kompensiert, sodass am Schluss $f(x) = -3x$ entsteht. Aus der Stammfunktion F erhalten wir nun das unbestimmte Integral von $f(x)$:

$$\int -3x dx = -\frac{3}{2}x^2 + c$$

(b) $f(x) = \sin x$ hat die Stammfunktion $F(x) = -\cos x$, denn

$$F'(x) = -(-\sin x) = \sin x.$$

Das unbestimmte Integral ist

$$\int \sin x dx = -\cos x + c.$$

Durch Umkehrung der Ableitungen der elementaren Funktionen von Tabelle 13.1 erhalten wir Tabelle 15.1 mit elementaren Stammfunktionen.

Für die Integration der Summe zweier Funktionen und der Multiplikation mit einer Konstante gilt das Folgende:

Satz 15.1.4 (Linearität des Integrals) Für Funktionen f, g und eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(i) \int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$(ii) \int af(x) dx = a \int f(x) dx$$

$f(x)$	$F(x)$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
e^x	e^x
a^x	$\frac{1}{\ln a} \cdot a^x, \quad a > 0$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

Tabelle 15.1: Stammfunktionen elementarer Funktionen

Beweis. Beide Formeln ergeben sich aus der Umkehrung der entsprechenden Ableitungsregeln (Summenregel und konstanter Faktor). Zum Beispiel erhält man (i) so: Seien F, G Stammfunktionen von f und g , d.h. $F' = f$, $G' = g$. Dann gilt nach der Ableitungsregel für Summen

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Also ist $F(x) + G(x)$ eine Stammfunktion von $f(x) + g(x)$, und damit folgt

$$\int (f(x) + g(x)) dx = F(x) + G(x) + c = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Bei der letzten Gleichheit haben wir die Stammfunktionen $F(x)$ und $G(x)$ als unbestimmte Integrale von f und g geschrieben. Die (beliebige!) Konstante c fällt dabei weg, da schon in den unbestimmten Integralen beliebige Konstanten enthalten sind. \square

Beispiel 15.1.5 Wir wollen das unbestimmte Integral $\int(-5x^2 + 3 \cos(2x)) dx$ berechnen. Wegen der Linearität des Integrals gilt zunächst

$$\int (-5x^2 + 3 \cos(2x)) dx = -5 \int x^2 dx + 3 \int \cos(2x) dx.$$

Zur Berechnung der beiden unbestimmten Integrale suchen wir jetzt Stammfunktionen von x^2 und $\cos(2x)$. Eine Stammfunktion von x^2 ist $\frac{1}{3}x^3$. Für $\cos(2x)$ erhält man als Stammfunktion $\frac{1}{2} \sin(2x)$, denn

$$\left(\frac{1}{2} \sin(2x)\right)' = \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \cdot 2 = \cos(2x).$$

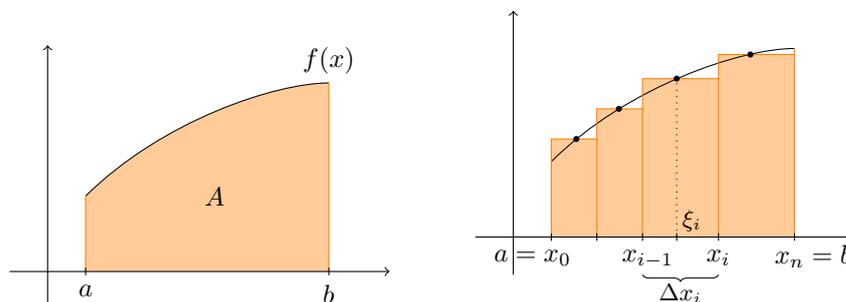


Abbildung 15.1: Zur Kontruktion des Integrals

Der Faktor $\frac{1}{2}$ kompensiert hier den Faktor 2, der sich aus der inneren Ableitung von $2x$ nach der Kettenregel ergibt. Somit ist

$$\int (-5x^2 + 3 \cos(2x)) dx = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2} \sin(2x) + c.$$

15.2 Das bestimmte Integral

Zur Einführung des bestimmten Integrals betrachten wir das Problem der Berechnung der Fläche unter dem Graphen einer Funktion.

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir suchen den Flächeninhalt A der Fläche zwischen der Funktion f und der x -Achse zwischen von a bis b , siehe Abbildung 15.1.

Die Idee ist, die Fläche A durch mehrere Rechteckstreifen anzunähern, deren Fläche sich berechnen lässt. Man wählt dazu

- eine Unterteilung x_0, \dots, x_n von $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b;$$

- Zwischenstellen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Das Intervall $[a, b]$ ist also zerlegt in Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$). Über jedem dieser Teilintervalle betrachtet man das Rechteck, dessen Höhe gleich dem Funktionswert $f(\xi_i)$ an der gewählten Zwischenstelle ξ_i ist. Durch Berechnung der Rechtecksflächen erhält man dann eine Annäherung an den gesuchten Flächeninhalt A . Jedes Rechteck hat die Fläche $f(\xi_i)\Delta x_i$ (Höhe mal Breite), wobei die Breite $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ist. Die Summe der Rechteckflächen ist damit

$$Z_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (15.3)$$

Diese Summe heißt *Riemannsche Summe*.

Die Summe Z_n wird nicht gleich dem gesuchten Flächeninhalt A sein, da am oberen Rand durch die Rechtecke Teile der Fläche fehlen und andere Teile zu viel sind. Je feiner aber die Unterteilung gewählt wird, das heißt je größer n und je kleiner die Δx_i sind, desto genauer nähert sich Z_n an A an. Man erwartet

daher, dass sich im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ und $\Delta x_i \rightarrow 0$ genau die gesuchte Fläche A ergibt.

Man kann nun tatsächlich zeigen, dass

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} Z_n \text{ existiert.}$$

(Im Beweis hiervon ist wichtig, dass f stetig ist.) Durch diesen Grenzwert wird nun das bestimmte Integral definiert:

Definition 15.2.1 Die Zahl

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} Z_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (15.4)$$

heißt *bestimmtes Integral*¹ von f über $[a, b]$. Die Funktion $f(x)$ im Integral nennt man auch *Integrand*.

Bemerkung: Die Definition des Integrals als Grenzwert Riemannscher Summen erklärt auch die Schreibweise für das Integral: Im Grenzwert werden die Differenzen Δx_i zur „infinitesimal kleinen Differenz“ dx . Es werden damit sozusagen die „infinitesimal schmalen“ Rechteckstreifen $f(x)dx$ für alle x von a bis b aufaddiert, was durch das Symbol \int_a^b dargestellt wird. Dabei ist \int ein stilisierter Buchstabe „S“, der für „Summe“ steht und die endliche diskrete Summe $\sum_{i=1}^n$ ersetzt. Kurz:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

Wir stellen einige Eigenschaften des bestimmten Integrals zusammen:

Satz 15.2.2 Für das bestimmte Integral gilt:

(i) *Linearität:*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) + g(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b \alpha f(x) dx &= \alpha \int_a^b f(x) dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

(ii) *Monotonie:* Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so folgt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

(iii) *Betragsabschätzung:*

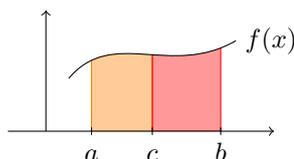
$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

¹Das Integral wird auch *Riemann Integral* genannt, nach dem Mathematiker Bernhard Riemann, der es entwickelt hat.

(iv) *Intervalladditivität:*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \text{für } a < c < b \quad (15.5)$$

Die Intervalladditivität (iv) bedeutet grafisch:



Die Fläche unter f von a bis b ist gleich der Summe der beiden Teilflächen von a bis c und von c bis b .

Beweis. Alle Eigenschaften ergeben sich aus entsprechenden Formeln für Riemannsche Summen. Wir zeigen das für (ii): Aus $f(x) \leq g(x)$ folgt $f(\xi_i)\Delta x_i \leq g(\xi_i)\Delta x_i$, da $\Delta x_i > 0$ ist. Damit ist

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i,$$

und im Grenzwert $n \rightarrow \infty$, $\Delta x_i \rightarrow 0$ wird aus den Riemanschen Summen das Integral, also

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

□

Zusätzlich zu den Regeln von Satz 15.2.2 setzt man noch

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (a < b) \quad (15.6)$$

und

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Durch (15.6) ist das Integral somit auch in dem Fall definiert, wenn die untere Grenze *größer* als die obere Grenze ist. Schließlich kann man noch die Integrationsvariable umbenennen, was in einigen Situationen praktisch ist, etwa

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

15.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Uns fehlt bis jetzt noch eine Möglichkeit, bestimmte Integrale wirklich auszurechnen. Außerdem ist nicht klar, warum unbestimmte Integrale genauso geschrieben werden wie bestimmte Integrale (bis auf die Grenzen); oder anders

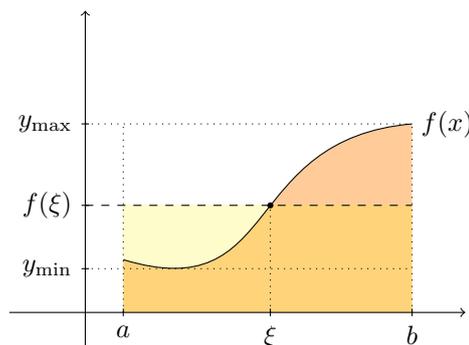


Abbildung 15.2: Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

gesagt, wie unbestimmte Integrale – also Stammfunktionen – mit bestimmten Integralen zusammenhängen. Diese Fragen beantwortet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Als Hilfsmittel für seinen Beweis benötigen wir den

Satz 15.3.1 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit*

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a).$$

Geometrisch bedeutet der Satz, dass die Fläche unter der Funktion f , also das Integral, genauso groß ist wie das Rechteck mit Breite $b - a$ und Höhe $f(\xi)$, siehe Abbildung 15.2. Der Satz behauptet also, dass man immer eine Stelle $\xi \in [a, b]$ finden kann, für die sich mit dem Funktionswert $f(\xi)$ als Höhe des Rechtecks die gleiche Fläche ergibt. Anschaulich ist das plausibel. Etwas formaler würde man so argumentieren:

Sei $A = \int_a^b f(x) dx$ die Fläche unter f . Man kann A als Fläche eines Rechtecks $A = y \cdot (b - a)$ schreiben, indem man als Höhe $y = \frac{A}{b-a}$ setzt. Sind y_{\min} und y_{\max} das Minimum und Maximum von f auf $[a, b]$, (vergleiche Satz 14.1.2, f ist stetig, $[a, b]$ ist abgeschlossen und beschränkt!) so folgt aus $y_{\min} \leq f(x) \leq y_{\max}$ zunächst

$$y_{\min} \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq y_{\max} \cdot (b - a)$$

(Monotonie des Integrals; die Fläche unter f ist größer als die des Rechtecks mit Höhe y_{\min} und kleiner als die mit Höhe y_{\max}). Aus

$$\int_a^b f(x) dx = A = y(b - a)$$

folgt dann

$$y_{\min} \leq y \leq y_{\max}.$$

Weil f stetig ist, also ohne Sprungstellen auf $[a, b]$, muss y deswegen ein Funktionswert von f sein, d.h. es gibt ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = y$.

Jetzt der Hauptsatz:

Satz 15.3.2 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

(i) Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist

$$F_0(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (15.7)$$

eine Stammfunktion von f , also $F_0'(x) = f(x)$.

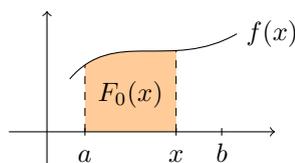
(ii) Ist F irgendeine Stammfunktion von f , dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (15.8)$$

Für die rechte Seite von (15.8) verwendet man auch diese beiden Schreibweisen („obere minus untere Grenze“):

$$[F(x)]_a^b = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

(15.7) bedeutet geometrisch, dass die Fläche unter f von a bis x (variable oberer Grenze) eine Stammfunktion von f ist:



Damit ist übrigens auch geklärt, welche Funktionen Stammfunktionen haben: Jede stetige Funktion hat eine Stammfunktion.

Beweis Hauptsatz.

(i) Wir berechnen die Ableitung von F_0 mit dem Differenzenquotienten: Unter Verwendung von (15.5) und dem Mittelwertsatz ist

$$\begin{aligned} \frac{F_0(x) - F_0(x_0)}{x - x_0} &= \frac{1}{x - x_0} \cdot \left(\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt \\ &= \frac{1}{x - x_0} \cdot f(\xi)(x - x_0) = f(\xi) \end{aligned}$$

wobei $x_0 \leq \xi \leq x$ (bzw. $x \leq \xi \leq x_0$ bei $x < x_0$). Im Grenzwert $x \rightarrow x_0$ konvergiert dann auch $\xi \rightarrow x_0$ und wir erhalten

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F_0(x) - F_0(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} f(\xi) = f(x_0),$$

wobei im letzten Schritt die Stetigkeit von f benutzt wurde.

- (ii) Sei F_0 die Stammfunktion aus (15.7). Ist F auch eine Stammfunktion, so gilt $F_0(x) = F(x) + c$ mit einem $c \in \mathbb{R}$ (Satz 15.1.2). Es gilt

$$F_0(a) = \int_a^a f(t) dt = 0.$$

Damit ist

$$F(a) + c = F_0(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -F(a)$$

und es folgt

$$\int_a^b f(t) dt = F_0(b) = F(b) + c = F(b) - F(a).$$

□

Beispiel 15.3.3 Wir berechnen das Integral

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x^2 + \cos(\pi x)) dx$$

mittels Stammfunktion:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x^2 + \cos(\pi x)) dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{\pi} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_1 \right) - \left(\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{\pi} \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1} \right) \\ &= \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{\pi} - \left(-\frac{1}{3 \cdot 8} - \frac{1}{\pi} \right) = 2 \cdot \frac{1}{3 \cdot 8} + 2 \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{1}{12} + \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

15.4 Integrale und Flächeninhalt

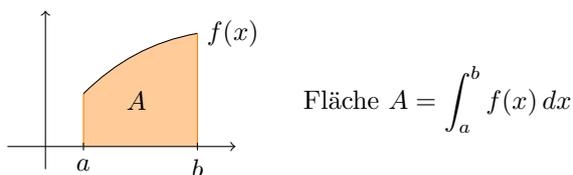
Wir haben das bestimmte Integral in Abschnitt 15.2 über die Berechnung der Fläche zwischen x -Achse und der Funktion eingeführt. Aber nur für positive Funktionen $f(x) \geq 0$ ist das Integral $\int_a^b f(x) dx$ identisch mit dem Flächeninhalt. Bei Bereichen mit $f(x) < 0$ sind zusätzliche Überlegungen nötig.

1. Fall: $f(x) \geq 0$ auf $[a, b]$.

Dann ist (Monotonie, Satz 15.2.2)

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b 0 dx = 0.$$

Das Integral hat also einen positiven Wert und nach der Konstruktion in Abschnitt 15.2 erhält man genau Inhalt der Fläche A zwischen x -Achse und Funktion im Bereich $[a, b]$:

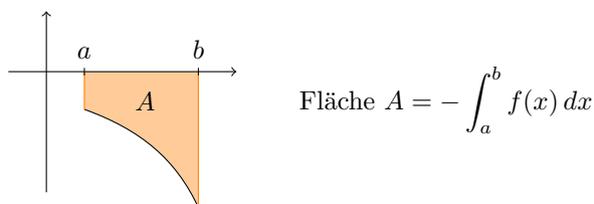


2. Fall: $f(x) \leq 0$ auf $[a, b]$.

Aus der Monotonie des Integrals folgt jetzt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b 0 dx = 0.$$

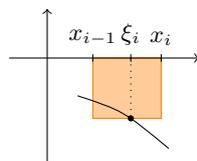
Das Integral hat also immer einen negativen Wert. Es kann damit kein Flächeninhalt sein, denn Flächeninhalte sind *immer* ≥ 0 . Hier ist das Integral der *negative* Flächeninhalt:



Der Grund dafür ergibt sich aus der Riemannschen Summe:

$$Z_n = \sum_{i=1}^n \underbrace{f(\xi_i)}_{\leq 0} \underbrace{\Delta x_i}_{\geq 0}$$

Wegen $f(\xi_i) \leq 0$ wird ein Rechteck mit einem negativen Wert für die Höhe berechnet, d.h. man erhält die negative Fläche des Rechtecks. Im Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ ergibt sich für das Integral daher auch der negative Flächeninhalt, $\int_a^b f(x) dx = -A$.

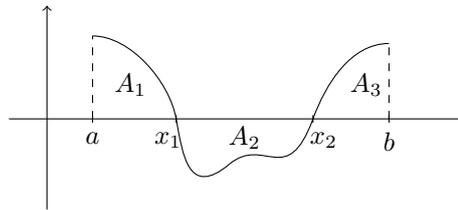


3. Fall: allgemeines f .

Nimmt die Funktion sowohl positive als auch negative Wert an, ist die Situation komplizierter. Wir betrachten hier ein konkreteres Beispiel, das die allgemeine Situation gut erläutert: Die Funktion sei so, dass

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0 && \text{auf } [a, x_1], [x_2, b], \\ f(x) &\leq 0 && \text{auf } [x_1, x_2]. \end{aligned}$$

Der Graph ist also etwa



Die Fläche, die zwischen der x -Achse und f im Intervall $[a, b]$ eingeschlossen ist, besteht also aus den drei Teilflächen A_1, A_2, A_3 . Für die Teilflächen ergibt sich nach Fall 1 bzw. 2:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_a^{x_1} f(x) dx && (f(x) \geq 0 \text{ auf } [a, x_1]) \\ A_2 &= - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx && (f(x) \leq 0 \text{ auf } [x_1, x_2]) \\ A_3 &= \int_{x_2}^b f(x) dx && (f(x) \geq 0 \text{ auf } [x_2, b]) \end{aligned}$$

Die Gesamtfläche ist damit

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^{x_1} f(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^b f(x) dx.$$

Der Wert des Integrals ist dagegen

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^b f(x) dx = A_1 - A_2 + A_3.$$

Das Integral ist also die Differenz aus der Fläche oberhalb der x -Achse ($A_1 + A_3$) und der Fläche unterhalb der x -Achse (A_2).

Bemerkung: Den Flächeninhalt zwischen einer Funktion und der x -Achse kann man auch ohne Fallunterscheidung über das Integral des Betrags als

$$A = \int_a^b |f(x)| dx \quad (15.9)$$

berechnen. Denn im 1. Fall $f(x) \geq 0$ ist $|f(x)| = f(x)$, also

$$A = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Im 2. Fall $f(x) \leq 0$ ist $|f(x)| = -f(x)$, und damit

$$A = - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Und im Beispiel für den 3. Fall ist $|f(x)| = f(x)$ auf $[a, x_1]$ und $[x_2, b]$, sowie $|f(x)| = -f(x)$ auf $[x_1, x_2]$, und damit

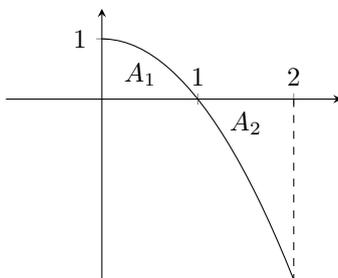
$$\begin{aligned} A &= \int_a^{x_1} f(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^b f(x) dx \\ &= \int_a^{x_1} |f(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \int_{x_2}^b |f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx. \end{aligned}$$

In der Praxis führt die Berechnung von (15.9) in der Regel wieder auf die gleichen Integrale wie in den Fällen 1 bis 3 zuvor, da zur Berechnung einer Stammfunktion von $|f(x)|$ der Betrag mit einer Fallunterscheidung nach $f(x) \geq 0$ bzw. $f(x) \leq 0$ aufgelöst werden muss.

Beispiel 15.4.1 Gesucht ist die Fläche A zwischen $f(x) = 1 - x^2$ und der x -Achse auf $[0, 2]$. Wir berechnen zuerst die Nullstellen von f , um die Bereiche zu finden, in denen $f(x)$ größer oder kleiner als Null ist.

$$1 - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$$

Damit ist $x = 1$ die einzige Nullstelle im betrachteten Intervall $[0, 2]$. Da f eine nach unten geöffnete Parabel ist (wegen $-x^2$!) und $x = 1$ die rechte der beiden Nullstellen, ist somit $f(x) \geq 0$ auf $[0, 1]$ und $f(x) \leq 0$ auf $[1, 2]$. Der Graph ist



Für die beiden Teilflächen A_1 und A_2 berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - x^2) dx &= \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{2}{3} \\ \int_1^2 (1 - x^2) dx &= \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 = 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 2 - \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \\ \Rightarrow \quad A_2 &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Die gesuchte Gesamtfläche ist somit

$$A = A_1 + A_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2.$$

Obwohl nicht gefragt, geben wir zur Erläuterung auch noch das Integral von f über das ganze Intervall an:

$$\int_1^2 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Diesen Wert erhalten wir äquivalent als Differenz der beiden Flächeninhalte A_1 oberhalb der x -Achse und A_2 unterhalb (vergeiche 3. Fall oben):

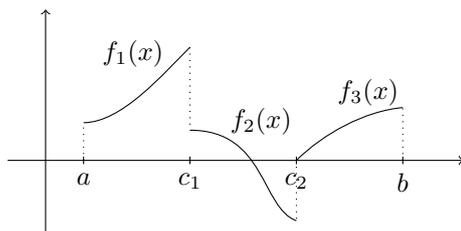
$$A_1 - A_2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}.$$

15.5 Integrale stückweise definierter Funktionen

Das bestimmte Integral haben wir in Abschnitt 15.2 streng genommen nur für stetige Funktionen definiert. Wir können aber auch Funktionen integrieren, die abschnittsweise definiert sind und somit Sprungstellen haben können². Sei zum Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & a \leq x < c_1 \\ f_2(x), & c_1 < x < c_2 \\ f_3(x), & c_2 < x \leq b \end{cases} \quad (15.10)$$

wobei die Funktion f_1, f_2, f_3 auf den Teilintervallen stetig sind,



Das Integral von f über $[a, b]$ kann man dann berechnen, indem man es in die Integrale über die einzelnen Teilintervalle $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$ und $[c_2, b]$ aufteilt (vergleiche Intervalladditivität in Satz 15.2.2):

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f_1(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f_2(x) dx + \int_{c_2}^b f_3(x) dx$$

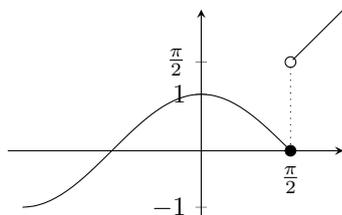
Beachte:

- Die Funktion f muss bei $x = c_1$ und $x = c_2$ nicht stetig sein.
- Der Wert $f(x)$ bei $x = c_1$ und $x = c_2$ ist nicht wichtig. (In (15.10) wurde $f(x)$ für $x = c_1$ und $x = c_2$ auch gar nicht definiert...)

Beispiel 15.5.1 Wir wollen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2} \\ x, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

über das Intervall $[-1, \pi]$ integrieren. f ist in $x = \frac{\pi}{2}$ nicht stetig, denn der linksseitige Grenzwert in $x = \frac{\pi}{2}$ ist $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, der rechtsseitige ist $\frac{\pi}{2}$. Der Graph von f ist



²Eine Funktion wie im obigen Beispiel hat maximal *endlich viele* Unstetigkeitsstellen (Sprungstellen) in $[a, b]$. Es ist aber sogar möglich, Integrale von Funktionen zu berechnen, die an *unendlich vielen* Stellen in $[a, b]$ unstetig sind.

Das Integral ist

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x dx \\ &= [\sin x]_{-1}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(-1) + \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= 1 + \sin(1) + \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{8}\pi^2 = 1 + \sin(1) + \frac{3}{8}\pi^2 \end{aligned}$$

(Hinweis: Ob die Funktion an der Schnittstelle $x = \frac{\pi}{2}$ stetig ist oder nicht, ist für die Berechnung des Integrals nicht wichtig; die Aufteilung in die zwei Teilintegrale kann man immer machen.)

15.6 Partielle Integration

Bis jetzt können wir Integrale nur in einfachen Fällen berechnen, wenn man die Stammfunktion mehr oder weniger direkt ablesen kann. Wir kommen daher jetzt zu verschiedenen *Integrationsmethoden*, mit denen wir die Stammfunktion auch in komplizierteren Fällen berechnen können.

Die erste Methode ist die *partielle Integration*, die eine Möglichkeit ist, das Integral des Produktes von zwei Funktionen zu berechnen. Die Formel der partiellen Integration erhält man durch die Umkehrung der Produktregel der Differentialrechnung:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Bilden wir hiervon das unbestimmte Integral, so ergibt sich

$$\underbrace{\int (f(x)g(x))' dx}_{f(x)g(x) (+c)} = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx.$$

Das Integral auf der linken Seite hebt sich dabei mit der Ableitung auf; anders gesagt ist $f(x)g(x)$ eine Stammfunktion von $(f(x)g(x))'$. Durch Auflösen der Gleichung nach einem der Integrale auf der rechten Seite erhalten wir dann:

Satz 15.6.1 (Regel der partiellen Integration) *Es gilt*

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx. \quad (15.11)$$

Für bestimmte Integrale ist

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx. \quad (15.12)$$

Mit der partiellen Integration wird also das Integral nur zum Teil (partiell) berechnet, es bleibt immer noch ein Integral stehen, das dann weiter berechnet werden muss. Das Ziel bei der Anwendung von partieller Integration ist daher, dass das Integral auf der rechten Seite von (15.11) bzw. (15.12) einfacher ist als das Ausgangsintegral auf der linken Seite.

Beispiel 15.6.2 (a) Wir wollen

$$\int_0^\pi x \cdot \sin(3x) dx$$

berechnen. Da der Integrand ein Produkt ist, können wir partielle Integration anwenden.

Es stellt sich nun die Frage, welchen der beiden Faktoren x und $\sin(3x)$ wir als $f'(x)$, und welchen als $g(x)$ wählen. Bei der partiellen Integration müssen wir dann zu $f'(x)$ die Stammfunktion $f(x)$ bilden, und von $g(x)$ die Ableitung $g'(x)$. Wir sollten also so wählen, dass wir die Stammfunktion $f(x)$ auch wirklich berechnen können, und außerdem so, dass das verbleibende Integral $\int f(x)g'(x) dx$ einfacher wird.

In diesem Beispiel sollte man daher $g(x) = x$ wählen. Denn dann ist $g'(x) = 1$, der Faktor fällt also im Integral $\int f(x)g'(x) dx$ weg! Für $f'(x)$ müssen wir nun den anderen Faktor wählen, also $f'(x) = \sin(3x)$. Die Stammfunktion dazu ist $f(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x)$. Zusammengefasst erhalten wir

$$\int_0^\pi \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\sin(3x)}_{f'(x)} dx \quad \begin{array}{l} f'(x) = \sin(3x) \rightarrow f(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x) \\ g(x) = x \rightarrow g'(x) = 1 \end{array}$$

Partielle Integration liefert somit

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\sin(3x)}_{f'(x)} dx &= \left[\underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right) \cos(3x)}_{f(x)} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right) \cos(3x)}_{f(x)} dx \\ &= -\frac{\pi}{3} \underbrace{\cos(3\pi)}_{-1} - 0 + \int_0^\pi \frac{1}{3} \cos(3x) dx = \frac{\pi}{3} + \left[\frac{1}{9} \sin(3x) \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{9} \underbrace{\sin(3\pi)}_0 - \frac{1}{9} \underbrace{\sin(0)}_0 = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

(2) Zu berechnen ist das unbestimmte Integral

$$\int x^2 e^x dx.$$

Wir wählen $g(x) = x^2$, da dann im verbleibenden Integral $g'(x) = 2x$ steht, also eine x -Potenz weniger, x statt x^2 . Die Stammfunktion von $f'(x) = e^x$ ist $f(x) = e^x$. Die partielle Integration ist somit

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{f'(x)} dx & \quad \begin{array}{l} f'(x) = e^x \rightarrow f(x) = e^x \\ g(x) = x^2 \rightarrow g'(x) = 2x \end{array} \\ = \underbrace{x^2}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{f(x)} - \int \underbrace{2x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{f(x)} dx \end{aligned}$$

Auf das verbleibende Integral können wir erneut partielle Integration anwenden; wir wählen wieder die x -Potenz als $g(x)$, d.h. $g(x) = 2x$. (Die

Wahl von $g(x) = e^x$ würde uns wieder zum Ausgangsintegral zurückbringen!) Das ergibt (beachte die Minusklammer!)

$$\begin{aligned}
 &= x^2 e^x - \int \underbrace{2x}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{f'(x)} dx && f'(x) = e^x \rightarrow f(x) = e^x \\
 & && g(x) = 2x \rightarrow g'(x) = 2 \\
 &= x^2 e^x - \left(2x e^x - \int 2e^x dx \right) \\
 &= x^2 e^x - 2x e^x + \underbrace{\int 2e^x dx}_{2e^x + c} = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) + c
 \end{aligned}$$

Tricks zur partielle Integration

Wir stellen zwei Situationen vor, in denen man partielle Integration auf besonders geschickte Weise anwenden kann:

- (a) In einem Integral, das zuerst gar kein Produkt enthält, kann man sich den Faktor 1 dazu denken und als $f'(x)$ wählen. Damit wird der eigentliche Integrand zu $g(x)$ und wird damit bei der partiellen Integration abgeleitet. Das kann dann helfen, wenn für den Integranden sonst keine Stammfunktion bekannt ist.

Als Beispiel berechnen wir

$$\int \ln x \, dx.$$

Für $\ln x$ kennen wir noch keine Stammfunktion. Wir schreiben daher

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx$$

und wählen $f'(x) = 1$ und $g(x) = \ln x$. Das ergibt

$$\begin{aligned}
 \int \ln x \, dx &= \int 1 \cdot \ln x \, dx && f'(x) = 1 \rightarrow f(x) = x \\
 & && g(x) = \ln x \rightarrow g'(x) = \frac{1}{x} \\
 &= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
 &= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln(x) - x + c
 \end{aligned}$$

Damit hat also $f(x) = \ln x$ die Stammfunktion $F(x) = x \cdot \ln(x) - x$.

- (b) Bei Integralen mit einer Sinus- oder Cosinusfunktion kommt es manchmal vor, dass man nach zweimaliger partieller Integration wieder das Ausgangsintegral erhält, aber mit einem zusätzlichen Faktor $\neq 1$. Man kann die erhaltene Gleichung dann nach dem Integral auflösen und es so berechnen.

Wir zeigen den Trick am Beispiel

$$\int e^x \cos x \, dx.$$

Wir wenden zweimal partielle Integration an, wobei wir jeweils die trigonometrische Funktion als abzuleitende Funktion $g(x)$ wählen. (Hier hätte man aber genausogut die Exponentialfunktion wählen können; wichtig ist nur, dass man bei beiden partiellen Integrationen dasselbe wählt.)

$$\begin{aligned} & \int e^x \cos x \, dx && f'(x) = e^x, & f(x) = e^x \\ & && g(x) = \cos x, & g'(x) = -\sin x \\ & = e^x \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x) \, dx \\ & = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx && f'(x) = e^x, & f(x) = e^x \\ & && g(x) = \sin x, & g'(x) = \cos x \\ & = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \end{aligned}$$

Wir haben somit wieder das Integral $\int e^x \cos x \, dx$ erhalten, aber mit einem Minuszeichen davor. Wir können jetzt die erhaltene Gleichung nach dem Integral auflösen:

$$\begin{aligned} & \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\ \Rightarrow & 2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x \\ \Rightarrow & \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x \cdot (\cos x + \sin x) + c \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die allgemeine Integrationskonstante c dazu geschrieben. Genaugenommen hätte sie auch schon in der Gleichung darüber stehen müssen; es wäre dann aber nicht dieselbe Konstante gewesen, da ja noch durch zwei geteilt wurde.

Das Verfahren kann man entsprechend auch bei $\int e^x \sin x \, dx$ oder zum Beispiel $\int e^{\alpha x} \sin(\beta x) \, dx$ mit Konstanten α, β anwenden.

15.7 Substitutionsregel

Die Substitutionsregel erhält man als Umkehrung der Kettenregel der Differentialrechnung: Sei F eine Stammfunktion von f . Nach der Kettenregel ist die Ableitung von $F(g(x))$

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Integration liefert dann

$$\begin{aligned} \int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx &= \int (F(g(x)))' \, dx = F(g(x)) + c \\ &= F(u) + c = \int f(u) \, du \end{aligned}$$

wobei wir am Schluss $u = g(x)$ substituiert haben. Wir haben damit

Satz 15.7.1 (Substitutionsregel) *Es gilt*

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du \quad (15.13)$$

mit der Substitution $u = g(x)$. Für bestimmte Integrale ist

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du \quad (15.14)$$

Bei bestimmten Integralen erfolgt also zusammen mit der Substitution $u = g(x)$ auch eine Substitution der Grenzen:

$$\text{obere Grenze: } x = b \rightarrow u = g(b)$$

$$\text{untere Grenze: } x = a \rightarrow u = g(a)$$

Die Formel der Substitutionsregel kann man sich mit folgender *Merkregel* einfach herleiten. Von der gewählten Substitution $u = g(x)$ bildet man die Ableitung, die man in der Leibniz-Schreibweise als Differentialquotient $\frac{du}{dx}$ schreibt (vergleiche (13.4)):

$$u = g(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x) dx$$

Dies setzt man dann in das Integral ein:

$$\int \underbrace{f(g(x))}_u \underbrace{g'(x) dx}_{du} = \int f(u) du$$

Beachte: Wichtig bei der Ausführung der Substitution ist, dass die Variable x *komplett* durch u ersetzt werden muss! D.h. im entstehenden Integral, in dem nach u integriert wird, darf an keiner Stelle mehr ein x stehen. Entweder kommt x in der Form $g(x)$ vor und kann dann mit $g(x) = u$ substituiert werden. Oder man nutzt die Umkehrfunktion $x = g^{-1}(u)$, um x zu ersetzen.

An den Formeln (15.13) und (15.14) sieht man, dass die Substitutionsregel bei Integralen angewandt werden kann, bei denen im Integranden eine Funktion $g(x)$ in eine andere eingesetzt wird *und zusätzlich* noch die Ableitung $g'(x)$ der „inneren Funktion“ als Faktor steht. Ein fehlender konstanter Faktor kann dabei aber kompensiert werden.

Beispiel 15.7.2 (a) Gegeben ist das Integral

$$\int 4x^3 e^{x^4+1} dx.$$

Man sieht, dass hier die Funktion $g(x) = x^4 + 1$ in die Exponentialfunktion eingesetzt wird. Außerdem ist die Ableitung $g'(x) = 4x^3$ der andere

Faktor im Integral. Wir können also die Substitutionsregel (15.13) direkt anwenden:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{4x^3}_{g'(x)} \underbrace{e^{x^4+1}}_{f(g(x))} dx & \quad u = g(x) = x^4 + 1, \quad f(u) = e^u \\ & \quad g'(x) = 4x^3 \\ & = \int e^u du = e^u + c \\ & = e^{x^4+1} + c \end{aligned}$$

Der letzte Schritt ist die Rücksubstitution, bei dem für u wieder $u = g(x) = x^4 + 1$ eingesetzt wird.

(b) Wir betrachten den Integraltyp

$$\int f(ax + b) dx \quad (a \neq 0) \quad (15.15)$$

bei dem der lineare Ausdruck $ax + b$ in die Funktion f eingesetzt ist. Die Substitution $u = g(x) = ax + b$ liefert

$$\frac{du}{dx} = g'(x) = a.$$

Der Faktor a fehlt zwar im Integral, ist aber konstant. Mit der Umformung

$$\frac{du}{dx} = a \quad \Leftrightarrow \quad du = a dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} du = dx$$

kann man die Substitution dann so durchführen:

$$\begin{aligned} \int f(ax + b) dx & = \int f(u) \cdot \frac{1}{a} du \\ & = \frac{1}{a} F(u) + c = \frac{1}{a} F(ax + b) + c \end{aligned}$$

Hierbei ist F eine Stammfunktion von f . Den Faktor $\frac{1}{a}$ im Ergebnis kennen wir schon von der Stammfunktion von $\cos(2x)$ aus Beispiel 15.1.5 – dort hatten wir ihn „von Hand“ zur Kompensation der inneren Ableitung gewählt.

Ein konkretes Beispiel für diesen Integraltyp ist

$$\int \sin(3x - 2) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x - 2) + c.$$

(c) Für Integrale des Typs

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx \quad (15.16)$$

verwendet man die Substitution $u = g(x)$. Die Ableitung $g'(x)$ steht als Zähler im Integrand, so dass die Substitution möglich ist:

$$\begin{aligned} \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx & \quad u = g(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x) dx \\ & = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c \\ & = \ln |g(x)| + c \end{aligned}$$

Als konkretes Beispiel wollen wir

$$\int \frac{x^2}{1+x^3} dx$$

berechnen. Das Integral ist (fast) vom Typ (15.16), denn die Ableitung des Nenners ist $3x^2$, und damit bis auf einen konstanten Faktor gleich dem Zähler; dieser konstante Faktor kann wieder kompensiert werden:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{1+x^3} dx & \quad u = 1 + x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow du = 3x^2 dx \\ & \quad \Leftrightarrow \frac{1}{3} du = x^2 dx \\ & = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \ln |u| + c \\ & = \frac{1}{3} \ln |1+x^3| + c \end{aligned}$$

Der Faktor 3 aus der Ableitung, der nicht im Integral steht, wird also in der Nebenrechnung als $\frac{1}{3}$ auf die Seite von du gebracht; $x^2 dx$ kann dann substituiert werden. Wichtig ist hier aber, dass es sich nur um einen *konstanten* Faktor handelt. Würde der Faktor auch noch die Variable x enthalten, so müsste diese noch mit substituiert werden! (Siehe den Hinweis auf Seite 226.)

- (d) Schließlich noch eine Substitution eines bestimmten Integrals, also mit Integrationsgrenzen. In

$$\int_0^1 x \cdot \sqrt{3-x^2} dx$$

bietet sich die Substitution $u = g(x) = 3 - x^2$ an; die Ableitung $-2x$ steht bis auf die Konstante -2 als Faktor im Integral:

$$u = 3 - x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow du = -2x dx \Leftrightarrow -\frac{1}{2} du = x dx.$$

Substitution der Grenzen liefert

$$\text{obere Grenze: } x = 1 \Rightarrow u = 3 - 1^2 = 2$$

$$\text{untere Grenze: } x = 0 \Rightarrow u = 3$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot \sqrt{3-x^2} dx & = \int_3^2 \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \\ & = -\frac{1}{2} \int_3^2 u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_3^2 \\ & = -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} - \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} \right) = \sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

(Eine Rücksubstitution ist hier nicht nötig, da die Integrationsgrenzen mit substituiert werden.)

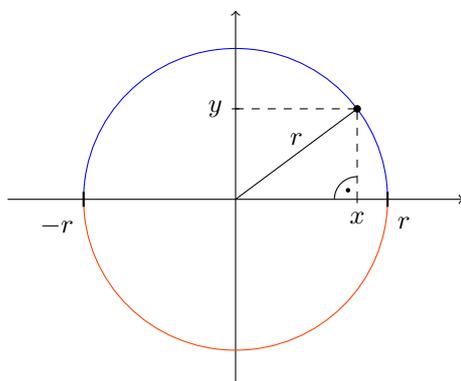


Abbildung 15.3: Zur Berechnung der Fläche des Kreises

15.8 Alternative Anwendung der Substitution

Man kann die Substitutionsregel auch alternativ so anwenden, dass im Integrand *nicht* eine schon vorhandene Funktion $g(x)$ durch u substituiert wird, sondern dass umgekehrt für x eine neue Funktion $g(u)$ eingeführt wird. Also

$$x = g(u) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{du} = g'(u) \quad \Rightarrow \quad dx = g'(u) du,$$

und damit

$$\int f(x) dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u) du \quad (15.17)$$

Im Integral kommen also neue Terme hinzu, wodurch das Integral zunächst komplexer wird. Die Idee bei dieser Art der Substitution ist dann, dass sich durch die neuen Terme Vereinfachungen ergeben. Anders gesagt sucht man also die Substitution $g(u)$ so, dass das entstehende Integral einfacher wird.

Bemerkung: Vergleicht man (15.17) mit der „normalen“ Substitutionsregel (15.13), sieht man, dass es dieselbe Formel ist, allerdings mit vertauschten Variablen x und u , und von rechts nach links gelesen. Man kann deshalb hier auch von „umgekehrter“ Substitution, oder „Substitution rückwärts“ sprechen.

Beispiel 15.8.1 Unser Ziel ist, die Fläche des Kreises mit Radius r zu berechnen. Den Kreis können wir als die Fläche ansehen, die zwischen dem oberen Kreisrand und dem unteren Kreisrand liegt, dargestellt in Abbildung 15.3. Der obere Kreisrand (in der Abbildung blau) ist eine Funktion von $x = -r$ bis $x = r$, genauso der untere Rand. Wir berechnen zunächst die Funktion für den oberen Rand. Ein Punkt (x, y) auf dem Kreisrand hat den Abstand r zum Ursprung. Für ihn gilt dann

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

(Das ist der Satz von Pythagoras im eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck!) Auflösen der Gleichung nach y ergibt

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Für den Punkt auf dem oberen Rand gilt $y \geq 0$, also

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Das ist die Funktion, die den oberen Kreisrand beschreibt, d.h. ihr Graph ist der obere Kreisrand. (Beachte, dass die Funktion auf $[-r, r]$ definiert ist, denn dort ist $r^2 - x^2 \geq 0$ und somit die Wurzel definiert.) Die Fläche zwischen der x -Achse und der Funktion ist das Integral der Funktion auf $[-r, r]$, also

$$\text{Fläche oberer Halbkreis} = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Auf den ersten Blick sieht man keine Stammfunktion für das Integral. Auch die Substitution $u = g(x) = r^2 - x^2$ funktioniert nicht, denn die Ableitung $g'(x) = -2x$ steht nicht im Integral, die Substitution kann man also nicht durchführen.

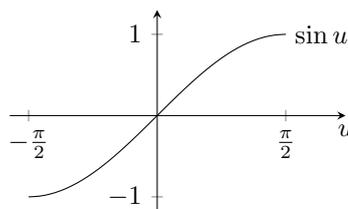
Die Idee für die Berechnung ist, die Sinusfunktion geschickt zu benutzen. Dazu schreibt man den Integrand zuerst als

$$\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)} = r \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}$$

Wäre nun $\frac{x}{r} = \sin u$, so wird der Term unter Wurzel zu $1 - \sin^2 u = \cos^2 u$ und man kann die Wurzeln ziehen und damit das Integral vereinfachen. Wir wählen daher als Substitution

$$\begin{aligned} x &= r \sin u & (\Leftrightarrow \frac{x}{r} &= \sin u) \\ \Rightarrow \frac{dx}{du} &= r \cos u & \Rightarrow dx &= r \cos u du \end{aligned}$$

Da wir ein bestimmtes Integral haben, müssen die Grenzen mit substituiert werden. Weil die x -Grenzen $x = r$ und $x = -r$ gegeben sind, die Substitution aber $x = r \sin u$ ist, müssen wir hier sozusagen rückwärts geeignete Werte für u finden. Dabei hilft der Graph des Sinus:



Für die Grenzen wählen wir daher

$$\text{obere Grenze: } u = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = r$$

$$\text{untere Grenze: } u = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -r$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx &= r \cdot \int_{-r}^r \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} dx \\ &= r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1 - \sin^2 u}}_{\cos^2 u} \cdot r \cos u du = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass

$$\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u \quad \text{da} \quad \cos u \geq 0 \text{ für } u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Um eine Stammfunktion von $\cos^2 u$ zu erhalten, benutzen wir die Folgerung aus dem Additionstheorem für Cosinus (siehe auch (13.10)):

$$\begin{aligned} \cos(2u) &= \cos^2 u - \sin^2 u = 2 \cos^2 u - 1 \\ \Rightarrow \cos^2 u &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2u)) \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \, du &= \frac{r^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2u)) \, du \\ &= \frac{r^2}{2} \left[u + \frac{1}{2} \sin(2u) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \underbrace{\sin(\pi)}_0 - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \underbrace{\sin(-\pi)}_0 \right) \right) \\ &= \frac{\pi r^2}{2} \end{aligned}$$

die Fläche des oberen Halbkreises. Für die gesamte Kreisfläche erhalten wir somit die bekannte Formel πr^2 .

15.9 Integration bei Symmetrien

In gewissen Fällen kann die Symmetrie einer Funktion bei der Berechnung bestimmter Integrale helfen:

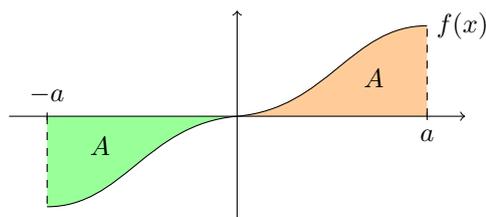
f ungerade: Sei f eine ungerade Funktion, also

$$f(-x) = -f(x).$$

Das Integral von f über das *symmetrische* Intervall $[-a, a]$ ist dann Null:

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0. \quad (15.18)$$

Denn da f ungerade ist, ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung, z.B.



Die Flächen zwischen der Funktion und der x -Achse in den Intervallen $[0, a]$ (rechts von der y -Achse) und $[-a, 0]$ (links von der y -Achse) sind also gleich. Somit gilt

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \underbrace{\int_{-a}^0 f(x) dx}_{-A} + \underbrace{\int_0^a f(x) dx}_A = -A + A = 0.$$

Beeachte: im Beispielbild ist $f(x)$ für $x \leq 0$ negativ und deshalb ist das linke Integral $\int_{-a}^0 f(x) dx = -A$.

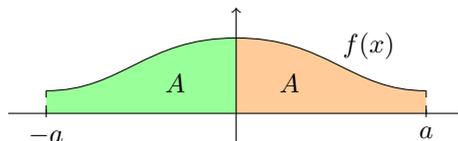
f gerade: Ist f gerade, also

$$f(-x) = f(x),$$

so gilt

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \quad (15.19)$$

Denn hier ist der Graph symmetrisch zur y -Achse, etwa



Wieder sind die Flächen links und rechts gleich, aber diesmal gilt für die Teilintegrale $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx = A$.

Bemerkung: Wir sind in der Begründung davon ausgegangen, dass die Funktion auf $[0, a]$ positiv ist, und daher das Integral dort gleich dem Flächeninhalt A . Die Aussagen gelten aber auch im allgemeinen Fall, wenn f auf $[0, a]$ auch negativ sein kann. Für ungerades f gilt nämlich stets

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx$$

und daher (15.18), und für gerades f

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$$

und damit (15.19).

Beispiel 15.9.1 Die Funktion

$$f(x) = \sin(\sin x)$$

ist ungerade:

$$f(-x) = \sin(\sin(-x)) = \sin(-\sin x) = -\sin(\sin x) = -f(x).$$

Damit gilt (für jede Zahl $a > 0$):

$$\int_{-a}^a \sin(\sin x) dx = 0.$$

Im Beispiel haben wir somit das Integral berechnet ohne eine Stammfunktion von f kennen zu müssen. Tatsächlich kann man (vermutlich) keine Stammfunktion von $f(x) = \sin(\sin x)$ berechnen, die sich mit den mathematischen Standardfunktionen darstellen lässt!

15.10 Integration rationaler Funktionen, Partialbruchzerlegung

In diesem Abschnitt wird erläutert, wie man systematisch Integrale rationaler Funktionen berechnet, also

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

wobei $p(x)$, $q(x)$ Polynome sind.

1. Schritt: Polynomdivision

Zuerst reduzieren wir das Problem durch Polynomdivision auf den Fall, dass im Integral Zählergrad kleiner als Nennergrad ist. Denn Polynomdivision ergibt

$$\frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

mit $\text{Grad } r < \text{Grad } q$. Integrieren liefert

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int h(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx.$$

Das Integral von $h(x)$ kann man dann leicht berechnen (Polynom!), und für das verbleibende Integral von $\frac{r(x)}{q(x)}$ gilt Zählergrad kleiner als Nennergrad; wir werden es im zweiten und dritten Schritt weiter vereinfachen und dann berechnen.

Beispiel 15.10.1 Wir wollen

$$\int \frac{x^3}{x^2 + 2x - 1} dx$$

berechnen. Da hier *noch nicht* Zählergrad kleiner als Nennergrad ist, führen wir Polynomdivision durch:

$$\begin{array}{r} x^3 : (x^2 + 2x - 1) = x - 2 \\ -(x^3 + 2x^2 - x) \\ \hline -2x^2 + x \\ -(-2x^2 - 4x + 2) \\ \hline 5x - 2 \end{array}$$

Es gilt somit

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{x^2 + 2x - 1} &= x - 2 + \frac{5x - 2}{x^2 + 2x - 1} \\ \Rightarrow \int \frac{x^3}{x^2 + 2x - 1} dx &= \int (x - 2) dx + \int \frac{5x - 2}{x^2 + 2x - 1} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \int \frac{5x - 2}{x^2 + 2x - 1} dx \end{aligned}$$

Das verbleibende Integral kann mit Schritt 2 und 3 berechnet werden.

2. Schritt: Partialbruchzerlegung

Nach der Polynomdivision aus Schritt 1 bleibt jetzt das Integral einer rationalen Funktion

$$\frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit } \text{Grad } p < \text{Grad } q$$

zu berechnen. Dazu vereinfachen wir $\frac{p(x)}{q(x)}$ mittels sogenannter Partialbruchzerlegung. Wir können dabei annehmen, dass p und q keine gemeinsamen Nullstellen haben. (Sonst könnten man die zugehörigen Linearfaktoren kürzen und damit den Bruch vereinfachen, siehe Abschnitt 12.6, rationale Funktionen.) Zuerst berechnet man eine reelle Faktorisierung von q der folgenden Form:

$$q(x) = \dots (x - x_i)^n \dots (x^2 + bx + c)^m \dots$$

Die Faktorisierung enthält dabei

- Linearfaktoren $(x - x_i)^n$ für jede reelle Nullstelle x_i der Vielfachheit n ,
- quadratische Faktoren $(x^2 + bx + c)^m$ zu jedem Paar komplex konjugierter Nullstellen (mit Vielfachheit m).

Für die Partialbruchzerlegung macht man nun den Ansatz, dass $\frac{p(x)}{q(x)}$ eine Summe von Brüchen ist der Form

$$\frac{A_1}{x - x_i} + \frac{A_2}{(x - x_i)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - x_i)^n} \quad (15.20)$$

für jeden Faktor $(x - x_i)^n$ von q , und

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + bx + c} + \dots + \frac{B_mx + C_m}{(x^2 + bx + c)^m} \quad (15.21)$$

für jeden Faktor $(x^2 + bx + c)^m$ von q . Die einzelnen Brüche in (15.20) und (15.21) nennt man *Partialbrüche*. Die Koeffizienten A_i, B_i, C_i werden aus dem Ansatz der Zerlegung berechnet. Wir erklären das an zwei Beispielen:

Beispiel 15.10.2 (a) Sei

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2 - 5}{x^3 - x^2 - 5x - 3}.$$

Die Nullstellen von q sind³ $x_1 = -1$ mit Vielfachheit 2 und $x_2 = 3$ mit Vielfachheit 1. Die Faktorisierung ist damit

$$q(x) = (x + 1)^2(x - 3).$$

Da beide Nullstellen reell sind, macht man für die Linearfaktoren $(x + 1)^2$ und $x - 3$ jeweils einen Ansatz mit Partialbrüchen der Form (15.20); für $(x + 1)^2$ ist das

$$\frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2}$$

³Wir geben die Nullstellen hier direkt an; sie können mit den Methoden aus Kapitel 12 berechnet werden.

(da der Faktor $(x+1)^2$ quadratisch ist wegen der Vielfachheit $n=2$ der Nullstelle -1 , geht man auch bei den Brüchen in (15.20) bis zum quadratischen Term $n=2$); für $x-3$ (Vielfachheit $n=1$) ist es entsprechend nur

$$\frac{C}{x-3}.$$

Die Koeffizienten A_i aus (15.20) haben wir hier einfach der Reihe nach A, B, C genannt. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung ist nun die Summe

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2 - 5}{(x+1)^2(x-3)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3}. \quad (15.22)$$

Um die Koeffizienten zu berechnen, bringen wir die Summe rechts auf Hauptnenner und vergleichen mit $\frac{p(x)}{q(x)}$:

$$\begin{aligned} & \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3} \\ &= \frac{A(x+1)(x-3) + B(x-3) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-3)} \stackrel{!}{=} \frac{x^2 - 5}{(x+1)^2(x-3)} \\ \Leftrightarrow & A(x+1)(x-3) + B(x-3) + C(x+1)^2 \stackrel{!}{=} x^2 - 5 \\ \Leftrightarrow & A(x^2 - 2x - 3) + B(x-3) + C(x^2 + 2x + 1) \stackrel{!}{=} x^2 - 5 \\ \Leftrightarrow & (A+C)x^2 + (-2A+B+2C)x - 3A - 3B + C \stackrel{!}{=} x^2 - 5 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt dann

$$\begin{aligned} A + C &= 1 \\ -2A + B + 2C &= 0 \\ -3A - 3B + C &= -5 \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für A, B, C :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & -5 \end{array} \right) +2\text{I} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \end{array} \right) +3\text{II} \\ \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 & 4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{aligned} 3. \text{ Zeile: } & 16C = 4 \Rightarrow C = \frac{1}{4} \\ 2. \text{ Zeile: } & B + 4C = 2 \Rightarrow B = 2 - 1 = 1 \\ 1. \text{ Zeile: } & A + C = 1 \Rightarrow A = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Einsetzen der Werte in den Ansatz (15.22) ergibt dann die Partialbruchzerlegung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2 - 5}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{\frac{3}{4}}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-3}.$$

Eine *Alternative* zum Lösen des kompletten Gleichungssystems ist das Einsetzen der Nullstellen von q in das Zwischenergebnis

$$A(x+1)(x-3) + B(x-3) + C(x+1)^2 = x^2 - 5$$

Man erhält damit (beachte, dass die Terme mit den Linearfaktoren zur jeweiligen Nullstelle wegfallen!)

$$x = -1 \Rightarrow -4B = 1 - 5 = -4 \Rightarrow B = 1$$

$$x = 3 \Rightarrow 16C = 9 - 5 = 4 \Rightarrow C = \frac{1}{4}$$

Den noch fehlenden Parameter A kann man nun einfach durch Koeffizientenvergleich der Terme zu x^2 bestimmen:

$$A + C = 1 \Rightarrow A = 1 - C = \frac{3}{4}.$$

(b) Sei

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2}{(x^2 + 4)(x - 1)}.$$

Der Nenner $q(x)$ ist hier schon faktorisiert gegeben. Er enthält den quadratischen Faktor $x^2 + 4$ (zum Paar konjugiert komplexer Nullstellen $x = \pm 2j$). Den Partialbruch zu $x^2 + 4$ erhalten wir damit aus (15.21) (mit $b = 0, c = 4, m = 1$), und der Ansatz für die Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{x^2}{(x^2 + 4)(x - 1)} \stackrel{!}{=} \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{x - 1}$$

Wir bringen die rechte Seite wieder auf Hauptnenner machen den Koeffizientenvergleich:

$$\frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{x - 1} = \frac{(Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 4)}{(x^2 + 4)(x - 1)} \stackrel{!}{=} \frac{x^2}{(x^2 + 4)(x - 1)}$$

$$\Leftrightarrow (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 4) = x^2$$

$$\Leftrightarrow (A + C)x^2 + (-A + B)x - B + 4C = x^2$$

$$A + C = 1$$

$$\Leftrightarrow -A + B = 0$$

$$-B + 4C = 0$$

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{array} \right) + \text{I} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{array} \right) + \text{II} \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} 5C = 1 &\Rightarrow C = \frac{1}{5} \\ B + C = 1 &\Rightarrow B = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \\ A + C = 1 &\Rightarrow A = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung ist damit

$$\frac{x^2}{(x^2 + 4)(x - 1)} = \frac{\frac{4}{5}x + \frac{4}{5}}{x^2 + 4} + \frac{\frac{1}{5}}{x - 1}$$

3. Schritt: Integration der Partialbrüche

Im letzten Schritt werden die Partialbrüche, die man im Schritt 2 erhalten hat, integriert. Für einen linearen Faktor $x - x_i$ ist

$$\int \frac{1}{x - x_i} dx = \ln |x - x_i| + c \quad (15.23)$$

und bei $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x - x_i)^n} dx &= \int (x - x_i)^{-n} dx = \frac{1}{-n + 1} (x - x_i)^{-n+1} + c \\ &= \frac{1}{(-n + 1)(x - x_i)^{n-1}} + c \end{aligned} \quad (15.24)$$

Für einen quadratischen Faktor der speziellen Form $x^2 + a^2$ (entspricht rein imaginären Nullstellen $x = \pm aj$ von $q(x)$) und $m = 1$ können wir die Integrale ebenfalls einfach berechnen:

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + (\frac{x}{a})^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (15.25)$$

$$\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + c \quad (15.26)$$

Hieraus ergibt sich dann das Integral für den Partialbruch aus (15.21) durch aufteilen:

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + a^2} dx = B \int \frac{x}{x^2 + a^2} dx + C \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx.$$

Bei $m \geq 2$ ist

$$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^m} dx = \frac{1}{2(1 - m)(x^2 + a^2)^{m-1}} + c \quad (15.27)$$

Für den Integraltyp

$$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^m} dx, \quad m \geq 2, \quad (15.28)$$

sind die Formeln komplizierter; sie können in Integraltafeln nachgeschlagen oder mit Computer-Algebra-Programmen berechnet werden. Einen allgemeinen quadratischen Faktor $x^2 + bx + c$ mit $b \neq 0$ kann man auf den Fall $x^2 + a^2$ zurückführen. Dazu geht man zunächst zur Scheitelpunktsform über:

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}$$

Dabei ist $c - \frac{b^2}{4} > 0$, da der quadratische Faktor zu komplexen Nullstellen gehört. Mit der Substitution $u = x + \frac{b}{2}$ und $a = \sqrt{c - b^2/4}$ erhält man dann $u^2 + a^2$.

Beispiel 15.10.3 Wir setzen das letzte Beispiel 15.10.2(b) fort. Aus der dort berechneten Partialbruchzerlegung ergibt sich mit (15.23), (15.25) und (15.26):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx &= \int \left(\frac{\frac{4}{5}x + \frac{4}{5}}{x^2 + 4} + \frac{\frac{1}{5}}{x - 1} \right) dx \\ &= \frac{4}{5} \int \frac{x}{x^2 + 4} dx + \frac{4}{5} \int \frac{1}{x^2 + 4} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{x - 1} dx \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{5} \ln|x - 1| + c \end{aligned}$$

Beachte, dass der Nenner der ersten beiden Integrale der quadratische Faktor $x^2 + 4 = x^2 + a^2$ mit $a = 2$ ist.

15.11 Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale sind Integrale, bei denen bei einem oder auch beiden Integrationsgrenzen ein Grenzwert vorkommt.

1. Fall: Integrationsgrenzen $\pm\infty$

Die Integrale der Form

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad (15.29)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (15.30)$$

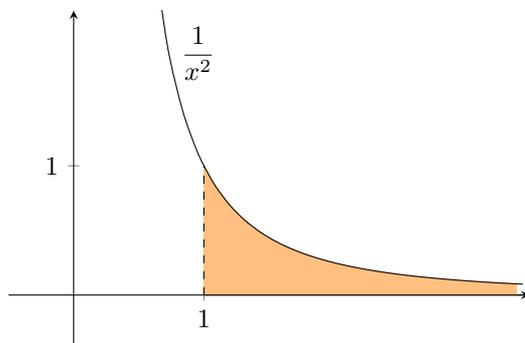
$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f(x) dx \quad (15.31)$$

heißen *uneigentliche Integrale*. Sie heißen *kovergent* wenn der Grenzwert existiert und endlich ist, sonst *divergent*.

Beispiel 15.11.1 (a) Wir berechnen das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx.$$

Das Integral entspricht der Fläche unter der Funktion $1/x^2$ von 1 bis ∞ :



Es gilt

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-x^{-1}]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1$$

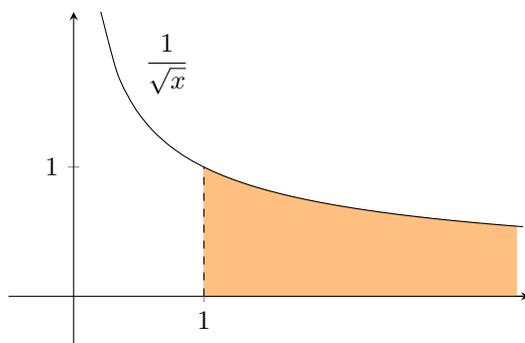
Der Grenzwert ist endlich, das uneigentliche Integral konvergiert somit. Geometrisch heißt das, dass die Fläche unter $1/x^2$ von 1 bis ∞ zwar unendlich lang ist, ihr Flächeninhalt aber trotzdem endlich!

(b) Wir betrachten jetzt

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Die Funktion $1/\sqrt{x}$ verläuft ähnlich wie $1/x^2$, fällt aber nicht so schnell für große x ; es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{x^2} \quad \text{für } x > 1.$$



Für das Integral ergibt sich diesmal

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} (2\sqrt{b} - 2) = \infty.$$

Dieses Integral ist also divergent, der Flächeninhalt unendlich.

Man beachte, dass wir hier im ersten Schritt die Schreibweise mit ∞ als obere Grenze an der Stammfunktion verwendet haben. Damit ist letztlich wieder der Grenzwert gemeint, d.h.

$$[F(x)]_a^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} [F(x)]_a^b.$$

Spätestens beim Einsetzen der Grenzen in die Stammfunktion (obere minus untere Grenze) muss man den Grenzwert dann aber wieder schreiben.

2. Fall: Funktion unbeschränkt bei a oder b

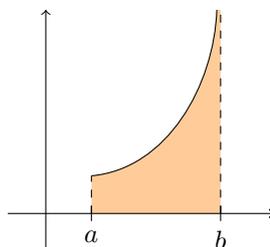
Wir betrachten hier Funktionen, die am Rand des Integrationsintervalls $[a, b]$ nicht definiert sind und dort eine Polstelle haben. Also zum Beispiel

$$f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{stetig,} \quad \lim_{x \nearrow b} f(x) = \pm\infty.$$

In diesem Fall bekommen wir das uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x) dx. \quad (15.32)$$

Graphisch bedeutet das zum Beispiel



Entsprechend ergibt sich bei einer Polstelle am linken Rand, d.h.

$$f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lim_{x \searrow a} f(x) = \pm\infty,$$

das uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \searrow a} \int_c^b f(x) dx.$$

Schließlich ist auch der Grenzwert auf beiden Seiten möglich.

Beispiel 15.11.2 Das Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

ist uneigentlich an beiden Integralgrenzen; denn der Integrand

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

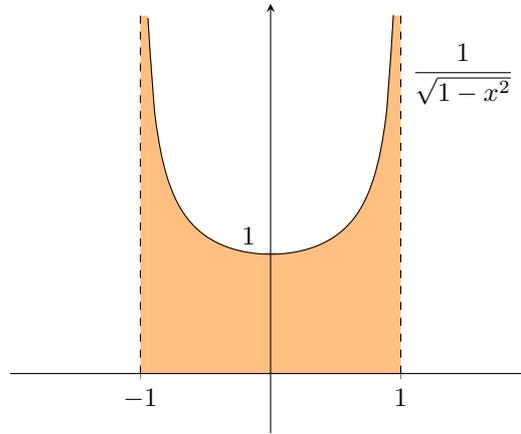
ist definiert für

$$1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$$

und die Grenzwerte am Rand sind

$$\lim_{x \searrow -1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty.$$

Graphisch:



Das Integral ist

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\substack{d \nearrow 1 \\ c \searrow -1}} \int_c^d \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \lim_{\substack{d \nearrow 1 \\ c \searrow -1}} [\arcsin x]_c^d = \lim_{\substack{d \nearrow 1 \\ c \searrow -1}} (\arcsin(d) - \arcsin(c)) \\ &= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Das Integral ist also konvergent.

Man beachte, dass die Stammfunktion $\arcsin x$ auf dem *abgeschlossenen* Intervall $[-1, 1]$, also auch in $x = -1$ und $x = 1$, definiert ist (vergleiche Abschnitt 3.5 über die Arcussfunktionen). Bei der Stammfunktion sind also die Grenzwerte gar nicht mehr nötig, man könnte direkt $[\arcsin x]_{-1}^1$ schreiben.

15.12 Numerische Integration

Für viele bestimmte Integrale ist eine exakte Berechnung per Stammfunktion entweder sehr aufwändig oder sogar gar nicht möglich. Der Grund ist, dass für viele Funktionen keine Stammfunktion bekannt ist, die sich mit den bekannten elementaren Funktionen (also x^n , \sqrt{x} , e^x , $\ln x$, $\sin x$, $\arctan x$ u.s.w.) darstellen lässt. Beispiele dafür sind die Funktionen

$$\sin(\sin x), \quad e^{-x^2}.$$

Und selbst wenn eine Stammfunktion berechnet werden kann, kann diese Berechnung sehr aufwändig sein (selbst mit Computer-Algebra-Programmen). Aus diesem Grund sind Verfahren zur näherungsweise Berechnung (Approximation) bestimmter Integrale interessant. Verfahren zur numerischen Integration werden auch als *Quadraturverfahren* bezeichnet.

Es gibt viele Verfahren zur numerischen Berechnung von $\int_a^b f(x) dx$. Eine der einfachsten ist die *Trapezregel*: Die Idee dabei ist, die (stetige) Funktion f durch Sekanten zu approximieren. Man wählt dazu eine Einteilung des Intervalls

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

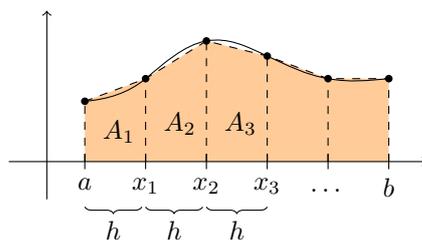


Abbildung 15.4: Die Trapezregel

mit konstanter Schrittweite

$$h = \frac{b-a}{n},$$

also

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n.$$

Auf jedem Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ wird f durch die Sekante an den Stellen x_{k-1} und x_k ersetzt und statt dem Integral von f auf $[x_{k-1}, x_k]$ das Integral der Sekante berechnet. Grafisch entspricht das der Berechnung einer Trapezfläche, siehe Abbildung 15.4. Die Flächeninhalte der Trapez sind

$$A_1 = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot h, \quad A_2 = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot h, \quad \dots$$

Damit ergibt sich als Näherungswert für das Integral

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx A_1 + A_2 + \dots + A_n \\ &= h \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right) \\ &= h \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right) \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$, das heißt $h \rightarrow 0$, konvergiert die Näherung gegen das exakte Integral, der Fehler konvergiert gegen Null.

Ein ähnliches Verfahren zur numerischen Integration ist die *Simpson-Regel*. Dabei wird f durch Parabeln statt Sekanten approximiert. Bei gleicher Schrittweite h erhält man damit einen besseren Näherungswert als bei der Trapezregel.

Kapitel 16

Allgemeine Vektorräume

In den letzten Kapiteln des Skripts kehren wir jetzt zum Thema Vektoren und Matrizen zurück. Wir untersuchen hier allgemeine Strukturen und Eigenschaften, die beim Umgang mit Vektoren auftreten, unter anderem den Begriff der *Dimension* und wie man sie berechnen kann. Wie sich herausstellt, kommen die Strukturen und Regeln, um die es hier geht, nicht nur beim Rechnen mit Vektoren vor, sondern auch in vielen anderen mathematischen Gebieten, zum Beispiel bei Funktionen. Das führt auf den allgemeinen Begriff des *Vektorraumes*.

Hinweis: In den alten Mathematik A&B Skripten finden sie den Stoff dieses Kapitels im Skript Mathematik A, Kapitel 5.

16.1 Definition des Vektorraums

Die Menge \mathbb{R}^n der Vektoren mit n Komponenten hat die Eigenschaft der *Linearität*:

- (i) für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ist $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R}^n$
- (ii) für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Das heißt, Summe und skalares Vielfaches von Vektoren aus \mathbb{R}^n gehören wieder zum \mathbb{R}^n . Diese *lineare Struktur* tritt oft auf:

Beispiel 16.1.1 (a) Ein homogenes Gleichungssystem können wir mit dem Matrix-Vektor-Produkt schreiben als

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \iff A\vec{x} = \vec{0}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge V des Gleichungssystems ist damit

$$V = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \} = \text{Kern } A,$$

also der Kern der Matrix A , vergleiche 9.1 und 9.2. Aus der Linearität des Matrix-Vektor-Produkts (Lemma 9.1.4) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} (i) \quad \vec{x} \in V, \vec{y} \in V &\Rightarrow A\vec{x} = \vec{0} \text{ und } A\vec{y} = \vec{0} \\ &\Rightarrow A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in V \\ (ii) \quad \vec{x} \in V, \lambda \in \mathbb{R} &\Rightarrow A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x} = \lambda\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \lambda\vec{x} \in V \end{aligned}$$

Mit \vec{x}, \vec{y} sind also auch $\vec{x} + \vec{y}$ und $\lambda\vec{x}$ Lösungen des homogenen Gleichungssystems. Die Lösungsmenge V hat also die Eigenschaft der Linearität.

Die Überlegungen gelten übrigens genauso für ein komplexes homogenes Gleichungssystem. Dann nimmt man allerdings $\lambda \in \mathbb{C}$, denn die Skalare sind dann komplexe Zahlen.

- (b) Wir betrachten die Menge V aller reellen Funktionen mit Definitionsbereich \mathbb{R} :

$$V = \{\text{alle Funktionen } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Auch diese Menge besitzt eine lineare Struktur:

$$\begin{aligned} (i) \quad f, g \in V &\Rightarrow f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ &\Rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ ist Funktion } f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ &\Rightarrow f + g \in V \\ (ii) \quad f \in V, \lambda \in \mathbb{R} &\Rightarrow (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \text{ ist Funktion } \lambda f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \lambda f \in V \end{aligned}$$

Im letzten Beispiel haben die Funktion f, g die Rolle der Vektoren übernommen. Man sieht also, dass in Bezug auf die Eigenschaft der Linearität auch andere mathematische Objekte als „Vektoren“ auftreten können, und nicht bloß (Spalten-) Vektoren mit n Komponenten. Um dies zu betonen, benutzt man deshalb folgende allgemeine Schreibweise:

$$\begin{aligned} \text{für Vektoren: } &u, v, w \in V \text{ (ohne Vektorpfeil)} \\ \text{für Skalare: } &\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

Dabei ist (wie schon in Kapitel 9) entweder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Eine Menge mit der Eigenschaft der Linearität wie in den letzten Beispielen ist ein Vektorraum:

Definition 16.1.2 Eine Menge V heißt *Vektorraum*, wenn es eine Addition und eine skalare Multiplikation in V gibt,

$$u + v \in V \text{ und } \lambda u \in V \text{ für } u, v \in V, \lambda \in \mathbb{K},$$

so dass die folgenden Regeln gelten:

- (1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ ($u, v, w \in V$)
- (2) $u + v = v + u$
- (3) es gibt $0 \in V$ mit $u + 0 = u$ (Nullvektor)
- (4) zu jedem $u \in V$ gibt es $-u \in V$ mit $u + (-u) = 0$ (negativer Vektor)

$$(5) \quad \lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{K})$$

$$(6) \quad 1u = u$$

$$(7) \quad (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$$

$$(8) \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$$

V heißt *reeller* Vektorraum, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und *komplexer* Vektorraum wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist. \mathbb{K} heißt *Körper* von V .

Beispiel 16.1.3 (a) Die Menge der Vektoren mit n Komponenten

$$\mathbb{R}^n = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \mid u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R} \right\}$$

ist ein reeller Vektorraum. Die Regeln (1) bis (8) aus der Definition haben wir schon in 7.2 und 7.3 kennengelernt.

(b) Die Vektorraum-Rechenregeln (1)–(8) sind auch für komplexe n -komponentige Vektoren mit komplexen Zahlen als Skalare, also $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, erfüllt. Das heißt

$$\mathbb{C}^n = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \mid u_1, \dots, u_n \in \mathbb{C} \right\}$$

ist ein komplexer Vektorraum.

(c) Die Menge aller reellen Funktionen

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ \text{alle } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \} \quad (16.1)$$

ist ein reeller Vektorraum (vergleiche Beispiel 16.1.1(b)). Der Nullvektor $0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist hier die konstante *Nullfunktion*

$$0(x) = 0 \quad \text{const.}$$

Es gilt nämlich

$$(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + 0 = f(x),$$

also tatsächlich $f + 0 = f$.

(d) Auch die Menge

$$P_m = \{ p \mid p \text{ ist reelles Polynom mit } \text{Grad } p \leq m \} \quad (16.2)$$

ist ein reeller Vektorraum. Denn die Addition zweier Polynome oder die Multiplikation mit einer Zahl ergibt wieder ein Polynom, wobei sich der Grad nicht vergrößern kann. Der Nullvektor $0 \in P_m$ ist hier das Nullpolynom $0(x) = 0x^m + \dots + 0x + 0$.

16.2 Untervektorräume

Definition 16.2.1 Eine Teilmenge $U \subset V$ eines Vektorraums V heißt *Untervektorraum* (auch einfach *Unterraum* oder *linearer Teilraum*) wenn gilt

- (i) $0 \in U$
- (ii) $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$
- (iii) $\lambda \in \mathbb{K}, u \in U \Rightarrow \lambda u \in U$

Ein Untervektorraum muss also den Nullvektor enthalten sowie abgeschlossen sein unter Addition und skalarer Multiplikation.

Ein Untervektorraum $U \subset V$ ist für sich selbst genommen wieder ein eigenständiger Vektorraum.¹ Das heißt, dass man nur noch die Vektoren $u \in U$ betrachtet; alle anderen Vektoren aus V werden ignoriert. Es folgt, dass alles, was für Vektorräume gilt, auch für Untervektorräume richtig ist. Wir werden in den folgenden Überlegungen daher häufig Aussagen für einen allgemeinen Vektorraum V machen, diese dann aber auf spezielle Untervektorräume U anwenden.

Beispiel 16.2.2 (a) Die Menge

$$U = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid u_1 = 0 \right\} = \left\{ u = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \mid u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R} \right\}$$

ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n . Wir überprüfen dazu, dass die Bedingungen (i)–(iii) aus Definition 16.2.1 erfüllt sind. Ein Vektor gehört zu U , genau dann wenn die erste Komponente des Vektors Null ist. Das ist für den Nullvektor offensichtlich erfüllt,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in U.$$

Sind weiter $u, v \in U$, so gilt

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \implies u + v = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}.$$

Die erste Komponente von $u + v$ ist also (natürlich) Null und daher $u + v \in U$. Schließlich gilt

$$\lambda \in \mathbb{K}, u \in U \implies \lambda u = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix} \in U.$$

¹Denn die Rechenregeln (1)–(8) bleiben erfüllt; speziell gelten (3) und (4) weil $0 \in U$ und $-u = (-1)u \in U$ nach (i) und (iii).

(b) Betrachten wir jetzt

$$U = \left\{ u \in \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid u_1 = 1 \right\}.$$

U ist eine Teilmenge von \mathbb{R}^n , aber kein Untervektorraum. Denn die erste Komponente des Nullvektors 0 ist nicht gleich 1 ,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

also hat der Nullvektor nicht die allgemeine Form eines Vektors aus U , also $0 \notin U$. Also ist Eigenschaft (i) für U nicht erfüllt, und damit ist U kein Untervektorraum.

(c) Für eine reelle $m \times n$ -Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ betrachten wir jetzt den Kern von A als Menge U ,

$$U = \text{Kern } A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\},$$

d.h. U ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. Diese Menge ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n . (Wir haben das in Beispiel 16.1.1(a) bereits nachgerechnet.)

(d) Es gibt noch zwei triviale Untervektorräume: Jeder Vektorraum V hat die beiden Untervektorräume

$$U = \{0\},$$

also den Untervektorraum der nur den Nullvektor enthält (Nullraum), und

$$U = V$$

d.h. den ganzen Vektorraum. Für einen gegebenen Vektorraum V sind das der kleinste beziehungsweise der größte Untervektorraum.

16.3 Lineare Hülle

In den Beispielen für Untervektorräume haben wir bisher immer *alle* Vektoren des Untervektorraums durch eine Eigenschaft angegeben, etwa alle Vektoren mit $Ax = 0$. Mit der linearen Hülle kann man Untervektorräume dagegen durch endlich viele konkrete Vektoren beschreiben.

Definition 16.3.1 Sei V ein Vektorraum, $v_1, \dots, v_k \in V$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$. Die Summe

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \in V$$

heißt *Linearkombination* der Vektoren v_1, \dots, v_k . Die Menge aller Linearkombinationen von v_1, \dots, v_k heißt *lineare Hülle* oder *Spann* von v_1, \dots, v_k :

$$\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \right\} \quad (16.3)$$

Lemma 16.3.2 $\text{span}(v_1, \dots, v_k)$ ist ein Untervektorraum von V .

Beweis. Wir überprüfen wieder die Bedingungen von Definition 16.2.1. Es gilt

$$0 = 0v_1 + \dots + 0v_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_k).$$

(Beachte, dass hier die erste Null der Nullvektor $0 \in V$ ist, die weiteren Nullen aber die Zahl 0, denn sie werden mit den Vektoren v_i multipliziert.) Für $v, w \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ gibt es Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$ mit

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k, \quad w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k.$$

Es folgt

$$v + w = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_k + \mu_k)v_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_k).$$

Schließlich für $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \Rightarrow \alpha v = (\alpha \lambda_1)v_1 + \dots + (\alpha \lambda_k)v_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_k).$$

□

Beispiel 16.3.3 Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Wir berechnen die lineare Hülle von v_1, v_2, v_3 ,

$$\text{span}(v_1, v_2, v_3) = \{ \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \}.$$

Der allgemeine Vektor in $\text{span}(v_1, v_2, v_3)$ ist die Linearkombination

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\beta + \gamma \\ \alpha \\ -\alpha + \beta \\ 2\beta + \gamma \end{pmatrix}.$$

Also ist die lineare Hülle

$$\text{span}(v_1, v_2, v_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 3\beta + \gamma \\ \alpha \\ -\alpha + \beta \\ 2\beta + \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Man kann nun z.B. überprüfen, ob ein bestimmter Vektor in der linearen Hülle liegt, indem man ihn mit dem allgemeinen Vektor von $\text{span}(v_1, v_2, v_3)$ gleichsetzt. Das ergibt ein Gleichungssystem für die Koeffizienten α, β, γ . Gibt es eine Lösung, so liegt der Vektor im Spann, andernfalls nicht.

Lineare Hülle in \mathbb{R}^3

Im \mathbb{R}^3 hat die lineare Hülle von einem und zwei Vektoren eine anschauliche geometrische Bedeutung einer Gerade bzw. Ebene:

- (a) Sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} \neq \vec{0}$: Die lineare Hülle von \vec{a} ist dann

$$\text{span}(\vec{a}) = \{\vec{x} = \lambda\vec{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(\vec{x} ist die Linearkombination von nur einem Vektor, \vec{a} .) Die lineare Hülle ist also die *Gerade in \mathbb{R}^3 durch den Nullpunkt* in Richtung des Vektors \vec{a} , denn

$$\vec{x} = \lambda\vec{a} \quad (= \vec{0} + \lambda\vec{a})$$

ist die entsprechende Geradengleichung. Diese Interpretation kann man auch auf einen allgemeinen reellen Vektorraum V übertragen: für $a \in V \setminus \{0\}$ ist

$$\text{span}(a) = \{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

die „Gerade“ in V durch 0 in Richtung von a .

- (b) Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, $\vec{b} \neq r\vec{a}$. (\vec{a} und \vec{b} sind also nicht parallel.) Dann ist

$$\text{span}(\vec{a}, \vec{b}) = \left\{ \vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

die *Ebene durch den Nullpunkt* mit den Richtungsvektoren \vec{a}, \vec{b} . Denn hier ist

$$\vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \quad (= \vec{0} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b})$$

die eine Ebenengleichung.

16.4 Erzeugendensysteme

In der linearen Hülle $\text{span}(v_1, \dots, v_k)$ können wir jeden Vektoren durch eine Linearkombination der festen Vektoren v_1, \dots, v_k ausdrücken. Das gleiche wollen wir nun auch für einen allgemeinen Untervektorraum U tun. Wir erhalten damit ein sogenanntes Erzeugendensystem von U :

Definition 16.4.1 Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Die Vektoren $v_1, \dots, v_k \in U$ heißen *Erzeugendensystem* von U , wenn gilt

$$U = \text{span}(v_1, \dots, v_k),$$

d.h., wenn sich jedes $u \in U$ als eine Linearkombination von v_1, \dots, v_k darstellen lässt:

$$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k. \quad (16.4)$$

Dabei sind die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ abhängig von u .

Im Fall eines Erzeugendensystems sagt man auch: U wird von v_1, \dots, v_k *erzeugt* bzw. *aufgespannt*.

Bemerkung: Aus $v_1, \dots, v_k \in U$ folgt, dass auch jede Linearkombination dieser Vektoren in U liegt,

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \in U,$$

denn U ist ein Untervektorraum! Es gilt also $\text{span}(v_1, \dots, v_k) \subset U$. Gilt andererseits (16.4) für jedes $u \in U$, also

$$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_k),$$

so gilt auch $U \subset \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ und damit dann $U = \text{span}(v_1, \dots, v_k)$.

Beispiel 16.4.2 (a) \mathbb{R}^n wird erzeugt von den Standard-Einheitsvektoren (auch *kanonische* Einheitsvektoren genannt, siehe (7.21))

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

das heißt es gilt

$$\mathbb{R}^n = \text{span}(e_1, \dots, e_n).$$

Denn für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n \in \text{span}(e_1, \dots, e_n).$$

(b) Der Untervektorraum

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid u_1 = 0 \right\}$$

aus Beispiel 16.2.2(a) wird erzeugt von e_2, \dots, e_n ; also

$$U = \text{span}(e_2, \dots, e_n).$$

Denn für $u \in U$ ist

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = u_2 e_2 + \dots + u_n e_n \in \text{span}(e_2, \dots, e_n).$$

($e_2, \dots, e_n \in U$ und damit $\text{span}(e_2, \dots, e_n) \subset U$ ist klar.)

(c) Sei

$$P_n = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p \text{ ist reelles Polynom mit Grad } \leq n\}$$

der Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens n (vergleiche Beispiel 16.1.3(d)). P_n ist Untervektorraum von $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, dem Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Der Unterraum P_n wird erzeugt von den *Monomen*

$$m_k(x) = x^k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (16.5)$$

denn für $p \in P_n$ ist

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \\ &= \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x^1 + \alpha_0 x^0 \\ &= \alpha_n m_n(x) + \dots + \alpha_1 m_1(x) + \alpha_0 m_0(x) \\ \Rightarrow p &= \alpha_n m_n + \dots + \alpha_1 m_1 + \alpha_0 m_0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$P_n = \text{span}(m_0, m_1, \dots, m_n).$$

(d) Sei $U = \text{Kern } A = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

U ist also die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 2x_1 - 4x_2 - x_3 & & & & 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 + 2x_4 & & & & 0 \end{array} \right|$$

Wir berechnen die Lösung des Gleichungssystems, also den allgemeinen Vektor in U :

$$\begin{aligned} (A|0) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \cdot 2 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -12 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right) -3I \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat damit Rang $r = 2$, somit $n - r = 4 - 2 = 2$ freie Parameter. Wir wählen $x_2 = \lambda$, $x_4 = \mu$ als Parameter. (Zur Frage der Wahl der Parameter im Gaußalgorithmus siehe die Bemerkung auf Seite 78.) Durch Rückwärtseinsetzen bekommen wir als Lösung

$$2. \text{ Zeile: } x_3 + 4x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = -4\mu$$

$$1. \text{ Zeile: } 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow 2x_1 = 4\lambda - 4\mu \Rightarrow x_1 = 2\lambda - 2\mu$$

also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda - 2\mu \\ \lambda \\ -4\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ein beliebiges $x \in U$ ist also die Linearkombination $x = \lambda u_1 + \mu u_2$ der beiden Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das heißt, diese Vektoren bilden ein Erzeugendensystem von U ,

$$U = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Wie das letzte Beispiel zeigt, kann man mit dem Gaußalgorithmus also ein Erzeugendensystem von Kern A berechnen. Wir formulieren das allgemein:

Bemerkung: Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ eine $m \times n$ -Matrix und $U = \text{Kern } A$, also der Untervektorraum aller Lösungen des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$. Der Gaußalgorithmus liefert die allgemeine Lösung von $Ax = 0$ in der Form

$$x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k, \quad (16.6)$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die freien Parameter der Lösung sind und $k = n - r$ mit dem Rang r , siehe auch Satz 9.2.3. Außerdem ist $Au_1 = \cdots = Au_k = 0$, d.h. $u_1, \dots, u_k \in \text{Kern } A$. Wegen (16.6) ist somit u_1, \dots, u_k ein Erzeugendensystem von Kern A , also

$$\text{Kern } A = \text{span}(u_1, \dots, u_k).$$

Bemerkung: Erzeugendensysteme sind nicht eindeutig: Zum Beispiel ist

$$\mathbb{R}^4 = \text{span}(e_1, e_2, e_3, e_4)$$

(Beispiel 16.4.2(a)), aber es gilt auch

$$\mathbb{R}^4 = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \quad (16.7)$$

Um das zu sehen, müssen wir ein beliebiges $x \in \mathbb{R}^4$ als Linearkombination

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16.8)$$

schreiben, d.h. zu vorgegebenem x müssen wir die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ so wählen können, dass (16.8) richtig ist. Tatsächlich kann man die λ_i nacheinander ausrechnen, indem man die Komponenten (Zeilen) von (16.8) von oben nach unten durchgeht:

1. Zeile: $x_1 = \lambda_1$
2. Zeile: $x_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_2 = x_2 - x_1$
3. Zeile: $x_3 = \lambda_2 + \lambda_3 \Leftrightarrow \lambda_3 = x_3 - (x_2 - x_1) = x_3 - x_2 + x_1$
4. Zeile: $x_4 = \lambda_3 + \lambda_4 \Leftrightarrow \lambda_4 = x_4 - (x_3 - x_2 + x_1) = \dots$

Mit dieser Wahl von $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ zu gegebenem $x \in \mathbb{R}^4$ gilt also (16.8) und daher haben wir das Erzeugendensystem in (16.7).

Ein anderes Beispiel: Sei U eine Ebene in \mathbb{R}^3 durch den Punkt 0. Dann gilt $U = \text{span}(a, b)$ für jedes Paar von (nicht parallelen) Richtungsvektoren $a, b \in U$.

Wegen der Nicht-Eindeutigkeit kann man verschiedene Erzeugendensysteme zur Beschreibung eines Untervektorraums verwenden. Man wird versuchen, ein (je nach Situation) möglichst einfaches Erzeugendensystem zu wählen. Der folgende Satz zeigt zwei Arten, wie Erzeugendensysteme abgeändert und damit eventuell vereinfacht werden können.

Satz 16.4.3 Sei V ein Vektorraum und $v_1, \dots, v_k \in V$.

(a) Für $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $\alpha_j \neq 0$ gilt

$$\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_k v_k).$$

(b) Gilt $w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k$ (ist also $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$) dann ist

$$\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(v_1, \dots, v_k, w).$$

Nach (a) kann man also jeden Vektor eines Erzeugendensystems mit einer Zahl $\neq 0$ skalieren; und nach (b) kann ein Vektor, der eine Linearkombination der anderen Vektoren des Erzeugendensystems ist, im System weggelassen werden – oder auch hinzugefügt; die lineare Hülle (also der erzeugte Unterraum) bleibt in allen Fällen unverändert.

Beweis.

(a) Einen beliebigen Vektor der linearen Hülle $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ kann man äquivalent als

$$u = \frac{\lambda_1}{\alpha_1} \cdot \alpha_1 v_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \cdot \alpha_k v_k$$

schreiben, so dass auch $u \in \text{span}(\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_k v_k)$ gilt. Beachte hier, dass $\alpha_j \neq 0$.

(b) Sei $u \in \text{span}(v_1, \dots, v_k, w)$, d.h. u ist eine Linearkombination

$$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu w.$$

Es gilt $v_1, \dots, v_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$, sowie $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ nach Voraussetzung. Damit folgt auch $u \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$, denn die lineare Hülle ist ein Untervektorraum.² Somit gilt

$$\text{span}(v_1, \dots, v_k, w) \subset \text{span}(v_1, \dots, v_k).$$

Die andere Inklusion $\text{span}(v_1, \dots, v_k) \subset \text{span}(v_1, \dots, v_k, w)$ ist klar.

□

²Ist U ein Untervektorraum, so gehört auch die Linearkombination $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$ von $u_1, \dots, u_k \in U$ wieder zu U , denn skalare Vielfache und Summen gehören nach Definition 16.2.1 wieder zu U .

Beispiel 16.4.4 (a) Als Beispiel für Teil (a) des letzten Satzes betrachten wir den Untervektorraum

$$U = \text{span}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 21 \\ -49 \end{pmatrix}\right).$$

Wir können hier das Erzeugendensystem, also die beiden Vektoren, die U aufspannen, durch Skalieren vereinfachen: den ersten Vektor multiplizieren wir mit 5 (um den Bruch zu eliminieren), den zweiten Vektor mit $\frac{1}{7}$ (das ergibt kleinere Zahlen; alle Komponenten waren Vielfache von 7!). Die lineare Hülle bleibt dabei unverändert, und somit ist

$$U = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}\right).$$

(b) Als Beispiel für Teil (b) sei jetzt

$$W = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Der dritte Vektor ist hier eine Linearkombination der beiden ersten Vektoren, nämlich

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt

$$W = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right),$$

das heißt, $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ kann man im Erzeugendensystem weglassen.

16.5 Lineare Unabhängigkeit

Wir haben gesehen, dass in einem Erzeugendensystem ein Vektor weggelassen werden kann, wenn er Linearkombination der übrigen Vektoren ist. Es stellt sich die Frage: Wie kann man feststellen, ob das der Fall ist? (Und wie findet man den Vektor, den man weglassen kann?) Oder anders formuliert: Wann kann kein Vektor eines Erzeugendensystems mehr weggelassen werden? Diese Fragen führen zum Begriff der linearen Unabhängigkeit.

Definition 16.5.1 Sei V ein Vektorraum, $v_1, \dots, v_k \in V$.

(a) Das System der Vektoren (v_1, \dots, v_k) heißt *linear unabhängig*, wenn

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0, \quad (16.9)$$

das heißt, wenn $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ nur im Fall $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ gilt.

(b) (v_1, \dots, v_k) heißt *linear abhängig*, wenn es nicht linear unabhängig ist, das heißt, es gibt $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ mit

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \quad \text{und (mindestens) ein } \alpha_i \neq 0. \quad (16.10)$$

Im Fall von linearer Abhängigkeit spricht man auch von einer *nicht-trivialen* Linearkombination $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$, d.h. mit (mindestens) einem $\alpha_i \neq 0$. Die triviale Linearkombination dagegen ist $0v_1 + \dots + 0v_k = 0$.

Für den Vektorraum \mathbb{R}^n (und genauso für \mathbb{C}^n) kann man lineare Unabhängigkeit über die eindeutige Lösbarkeit eines homogenen Gleichungssystems untersuchen: Für $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ betrachte die Matrix

$$A = (v_1, \dots, v_k)_{n \times k}.$$

Die Vektoren v_1, \dots, v_k sind also die Spalten von A . Dann ist

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = A\alpha \quad \text{wobei} \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

(vergleiche (9.19)). Die Linearkombination auf der linken Seite von (16.9) ergibt damit das homogene lineare Gleichungssystem

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = A\alpha = 0.$$

Also ist (v_1, \dots, v_k) linear unabhängig, genau dann wenn das Gleichungssystem $A\alpha = 0$ die eindeutige Lösung $\alpha = 0$ hat. Wir halten das als Lemma fest:

Lemma 16.5.2 *Sei $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{K}^n$ und sei A die $n \times k$ -Matrix mit den Vektoren in den Spalten,*

$$A = (v_1, \dots, v_k)_{n \times k}.$$

Dann sind äquivalent:

- (i) (v_1, \dots, v_k) ist linear unabhängig;
- (ii) das Gleichungssystem $A\alpha = 0$ hat die eindeutige (triviale) Lösung $\alpha = 0$;
- (iii) das Gleichungssystem $A\alpha = 0$ hat den Rang k .

Im Fall von n Vektoren v_1, \dots, v_n , wenn also A quadratisch ist, gilt außerdem:

$$(v_1, \dots, v_n) \text{ linear unabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0.$$

Beweis. (i) \Leftrightarrow (ii) haben wir oben erläutert.

(ii) \Leftrightarrow (iii): $A\alpha = 0$ hat genau dann die eindeutige Lösung $\alpha = 0$, wenn beim Gaußalgorithmus keine freien Parameter auftreten, also wenn der Rang gleich k ist (Anzahl der Variablen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$).

Im quadratischen Fall ist $A\alpha = 0$ eindeutig lösbar genau dann, wenn A invertierbar ist, d.h. wenn $\det A \neq 0$. \square

Beispiel 16.5.3 (a) Wir untersuchen, ob das System (e_1, \dots, e_n) aus den Standard-Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig ist. Wir können das hier ganz einfach direkt mit (16.9) ablesen: Es gilt

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

und somit

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Also ist (e_1, \dots, e_n) linear unabhängig.

(b) Ist das System der Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig? Gleichung (16.9) aus der Definition der linearen Unabhängigkeit ergibt hier

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0.$$

Das ist ein homogenes lineares Gleichungssystem für die Unbekannten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; in Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = A\alpha = 0.$$

Dies ist genau das Gleichungssystem aus Lemma 16.5.2 mit den drei Vektoren als den Spalten der Matrix: $A = (v_1, v_2, v_3)_{3 \times 3}$. Wir prüfen, ob das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \text{--I} & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \text{--2II} \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Der Rang ist 2, also gibt es $3 - 2 = 1$ freien Parameter. Das Gleichungssystem hat damit nicht nur die (eindeutige) Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, sondern auch Lösungen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$. Also ist (v_1, v_2, v_3) linear abhängig.

Die Lösung des Gleichungssystem hat freie Parameter weil $2 < 3$, weil also der Rang 2 nicht gleich der Anzahl der Vektoren 3 ist, siehe Lemma 16.5.2(iii).

Alternativ kann man die lineare Abhängigkeit auch direkt durch Betrachten der Vektoren ablesen: Man sieht, dass

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = v_3.$$

Daraus folgt $v_1 + v_2 - v_3 = 0$, d.h. wir haben die nicht-triviale Linearkombination

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1.$$

Somit ist (v_1, v_2, v_3) linear abhängig.

Die Frage, ob in einer linearen Hülle ein Vektor weggelassen werden kann, lässt sich jetzt durch Untersuchung der linearen Unabhängigkeit der Vektoren beantworten:

Bemerkung: Es gilt

$$(v_1, \dots, v_k) \text{ linear abhängig} \Leftrightarrow \text{es gibt (mind.) ein } v_i \text{ mit} \\ v_i \in \text{span}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

In diesem Fall folgt dann nach Satz 16.4.3

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \text{span}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n).$$

Gilt zum Beispiel

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha_1 \neq 0,$$

so kann man nach v_1 auflösen:

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} v_k.$$

Hier ist also $v_1 \in \text{span}(v_2, \dots, v_k)$ und damit folgt dann $\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(v_2, \dots, v_k)$. Allgemein gilt

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \wedge \alpha_i \neq 0 \Rightarrow v_i \in \text{span}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k)$$

Beispiel 16.5.4 Wir betrachten nocheinmal die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

von Beispiel 16.5.3(b). Wir hatten dort gesehen, dass das System (v_1, v_2, v_3) linear abhängig ist. Zur Prüfung auf lineare Unabhängigkeit hat wir das resultierende Gleichungssystem auf Zeilen-Stufenform gebracht:

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Die Lösung hat damit einen freien Parameter – wir wählen $\alpha_3 = t$. Jede Wahl des Parameters $t \neq 0$ ergibt dann eine nicht-triviale Lösung $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ des Gleichungssystems, und damit eine nicht-triviale Linearkombination

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0.$$

Wir wählen $\alpha_3 = t = 1$, woraus dann

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 &\Rightarrow \alpha_2 = -1 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 &\Rightarrow \alpha_1 = -1 \end{aligned}$$

folgt. Das ergibt die Linearkombination

$$-v_1 - v_2 + v_3 = 0. \tag{16.11}$$

Hieraus folgt

$$v_3 = v_1 + v_2 \in \text{span}(v_1, v_2)$$

und damit

$$\text{span}(v_1, v_2, v_3) = \text{span}(v_1, v_2).$$

Wir können (16.11) aber auch nach v_2 oder v_1 auflösen. Das ergibt dann

$$v_1 = -v_2 + v_3 \in \text{span}(v_2, v_3) \Rightarrow \text{span}(v_1, v_2, v_3) = \text{span}(v_2, v_3)$$

beziehungsweise

$$v_2 = -v_1 + v_3 \in \text{span}(v_1, v_3) \Rightarrow \text{span}(v_1, v_2, v_3) = \text{span}(v_1, v_3).$$

In der linearen Hülle $\text{span}(v_1, v_2, v_3)$ kann in diesem Beispiel also der Vektor v_1 , oder v_2 , oder v_3 weggelassen werden.

Bemerkung: Im Fall von nur einem oder zwei Vektoren lässt sich lineare Unabhängigkeit einfach überprüfen:

ein Vektor:

$$(v_1) \text{ linear unabhängig} \Leftrightarrow v_1 \neq 0 \tag{16.12}$$

Denn für $v_1 \neq 0$ gilt $\alpha_1 v_1 = 0$ nur bei $\alpha_1 = 0$ (\Rightarrow lin. unabh.) Und bei $v_1 = 0$ ist zum Beispiel $1v_1 = 0$ (\Rightarrow lin. abh. mit $\alpha_1 = 1$.)

zwei Vektoren:

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) \text{ linear unabhängig} &\Leftrightarrow v_1 \neq 0, v_2 \neq 0 \text{ und} \\ &v_1 \neq \lambda v_2 \text{ f\u00fcr jedes } \lambda \in \mathbb{R} \quad (16.13) \\ &(\text{oder \u00e4quivalent } v_2 \neq \lambda v_1) \end{aligned}$$

F\u00fcr lineare Unabh\u00e4ngigkeit zweier Vektoren d\u00fcrfen also die Vektoren nicht skalare Vielfache voneinander sein. Dies folgt aus der Bemerkung von Seite 257.

Beispiel 16.5.5 Die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sind linear abh\u00e4ngig voneinander (d.h., das System der beiden Vektoren ist linear abh\u00e4ngig): denn offenbar gilt $v_2 = -2v_1$. Die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind linear unabh\u00e4ngig voneinander, denn $u_1, u_2 \neq 0$, und beide Vektoren sind nicht Vielfache voneinander: $u_1 \neq \lambda u_2$ f\u00fcr alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Das n\u00e4chste Lemma macht es m\u00f6glich, lineare Unabh\u00e4ngigkeit schrittweise zu begr\u00fcnden:

Lemma 16.5.6 *Seien $v_1, \dots, v_k, w \in V$. Ist (v_1, \dots, v_k) linear unabh\u00e4ngig und gilt $w \notin \text{span}(v_1, \dots, v_k)$, dann ist auch (v_1, \dots, v_k, w) linear unabh\u00e4ngig.*

Beweis. Sei

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} w = 0. \quad (16.14)$$

Angenommen $\alpha_{k+1} \neq 0$. Dann k\u00f6nnten wir (16.14) nach w aufl\u00f6sen,

$$w = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}} v_1 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} v_k,$$

woraus $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ folgt, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $w \notin \text{span}(v_1, \dots, v_k)$. Somit ist $\alpha_{k+1} = 0$, woraus dann

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$$

folgt und damit auch $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, da (v_1, \dots, v_k) linear unabh\u00e4ngig ist. Also ist (v_1, \dots, v_k, w) linear unabh\u00e4ngig. \square

Beispiel 16.5.7 Wir benutzen Lemma 16.5.6 um zu zeigen, dass das System der Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig ist. Zunächst ist (v_1, v_2) linear unabhängig, da $v_1, v_2 \neq 0$ und $v_1 \neq \lambda v_2$. Außerdem sieht man sofort, dass

$$v_3 \notin \text{span}(v_1, v_2);$$

denn die zweiten Komponenten von v_1 und v_2 sind Null, die von v_3 aber ungleich Null, so dass v_3 keine Linearkombination von v_1 und v_2 sein kann:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ * \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_3.$$

Also ist (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig.

Beachte: Lineare Unabhängigkeit ist eine Eigenschaft des *kompletten Systems* (v_1, \dots, v_k) der Vektoren – es langt nicht, dass die Vektoren lediglich paarweise voneinander linear unabhängig sind.

Zum Beispiel muss bei drei Vektoren für lineare Unabhängigkeit gelten, dass (siehe Bemerkung Seite 257)

$$v_1 \notin \text{span}(v_2, v_3), \quad v_2 \notin \text{span}(v_1, v_3), \quad \text{und} \quad v_3 \notin \text{span}(v_1, v_2).$$

Es langt dagegen **nicht**, dass v_1 von v_2 linear unabhängig ist (d.h. $v_1 \neq \lambda v_2$), und v_1 linear unabhängig von v_3 , und v_2 von v_3 . Nach dem letzten Lemma kann man aber sagen:

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) \text{ linear unabhängig, und } v_3 \notin \text{span}(v_1, v_2) \\ \Rightarrow (v_1, v_2, v_3) \text{ linear unabhängig} \end{aligned}$$

Ein einfaches Beispiel sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren sind jeweils nicht Vielfache voneinander ($v_1 \neq \lambda v_2$, $v_2 \neq \lambda v_3$, $v_1 \neq \lambda v_3$), d.h. jeweils zwei von ihnen sind zueinander linear unabhängig: v_1 linear unabhängig von v_2 , v_1 linear unabhängig von v_3 , ... **Aber** das ganze System (v_1, v_2, v_3) ist linear *abhängig*, denn offenbar gilt $v_3 \in \text{span}(v_1, v_2)$ weil ja $v_3 = v_1 + v_2$. Die lineare Abhängigkeit folgt auch aus der Gleichung $v_1 + v_2 - v_3 = 0$, also

$$1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3 = 0$$

(nicht-triviale Linearkombination, die Null ergibt.) Ein Beispiel in \mathbb{R}^3 sind die Vektoren von Beispiel 16.5.3(b).

16.6 Basis und Dimension

Die Basis ist der zentrale Begriff in der Theorie der Vektorräume. Mit einer Basis lässt sich ein beliebiger Vektor des Raumes eindeutig durch seine Komponenten bezüglich der Basis darstellen. Auch die Dimension eines Vektorraums wird mithilfe einer Basis definiert.

Definition 16.6.1 Ein System (v_1, \dots, v_n) von Vektoren eines Vektorraums V heißt *Basis* (des Vektorraums), wenn

- (i) (v_1, \dots, v_n) linear unabhängig ist,
- (ii) v_1, \dots, v_n ein Erzeugendensystem von V ist, d.h. $V = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$.

Kurz gesagt ist also eine Basis ein linear unabhängiges Erzeugendensystem; also ein Erzeugendensystem, bei dem kein Vektor mehr weggelassen werden kann (vergleiche Bemerkung Seite 257).

Mit einem Erzeugendensystem kann jeder Vektor x als Linearkombination der Vektoren des Systems geschrieben werden. Bei einer Basis ist diese Darstellung auch eindeutig – d.h. die Koeffizienten in der Linearkombination sind eindeutig bestimmt durch x :

Satz 16.6.2 Sei (v_1, \dots, v_n) Basis von V . Dann hat jedes $x \in V$ eine eindeutige Darstellung als Linearkombination

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Beweis. Da v_1, \dots, v_n Erzeugendensystem von V ist, hat x eine Darstellung als Linearkombination

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Sei nun

$$x = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

eine (möglicherweise) andere Darstellung von x , also mit anderen Koeffizienten μ_i . Durch Subtrahieren beider Darstellung folgt dann

$$0 = x - x = (\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)v_n.$$

Da (v_1, \dots, v_n) eine Basis, also auch linear unabhängig ist, impliziert das

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0, \dots, \lambda_n - \mu_n = 0,$$

also

$$\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n.$$

D.h. die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind eindeutig bestimmt durch x . □

Beispiel 16.6.3 (a) Sei $V = \mathbb{K}^n$. (Also $V = \mathbb{R}^n$ oder $V = \mathbb{C}^n$.) Für die Standard-Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

haben wir gesehen, dass (e_1, \dots, e_n) linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von \mathbb{K}^n ist (Beispiel 16.4.2(a) und 16.5.3(a).) Damit ist (e_1, \dots, e_n) eine Basis von \mathbb{K}^n . Sie wird *kartesische, kanonische*, beziehungsweise *Standardbasis* von \mathbb{K}^n genannt. Für ein beliebiges $x \in V$ ergibt sich die eindeutige Darstellung in der Basis als

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

(b) Die System der Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ist linear unabhängig ($v_1 \neq \lambda v_2$). Sind v_1, v_2 auch ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^2 ? Dafür müssen wir überprüfen, ob ein beliebiges $x \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ dargestellt werden kann:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten λ_1, λ_2 :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_2 \\ 2 & 1 & x_1 \end{array} \right) - 2\mathbf{I} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_2 \\ 0 & -1 & x_1 - 2x_2 \end{array} \right)$$

Das Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar (Rang = 2, kein freier Parameter). Rückwärtseinsetzen ergibt

$$\begin{aligned} -\lambda_2 &= x_1 - 2x_2 \Rightarrow \lambda_2 = -x_1 + 2x_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= x_2 \Rightarrow \lambda_1 = x_2 - (-x_1 + 2x_2) = x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Für x erhalten wir damit die Darstellung als Linearkombination

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (x_1 - x_2)v_1 + (-x_1 + 2x_2)v_2. \quad (16.15)$$

Insbesondere ist $x \in \text{span}(v_1, v_2)$, d.h. v_1, v_2 ist Erzeugendensystem von \mathbb{R}^2 . Damit ist also (v_1, v_2) eine Basis von \mathbb{R}^2 . Die eindeutige Darstellung eines Vektors $x \in \mathbb{R}^2$ in der Basis ist (16.15). Konkret hat etwa

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Darstellung

$$x = -v_1 + 2v_2.$$

(denn $\lambda_1 = x_1 - x_2 = 0 - 1 = -1$, $\lambda_2 = -x_1 + 2x_2 = 0 + 2 \cdot 1 = 2$)

Der nächste Satz hilft, sowohl theoretisch als auch praktisch, eine Basis aus gegebenen Vektoren aufzubauen.

Satz 16.6.4 (Basisergänzungssatz) *Sei (v_1, \dots, v_k) linear unabhängig und sei w_1, \dots, w_m ein Erzeugendensystem von V . Dann kann (v_1, \dots, v_k) durch Vektoren w_i zu einer Basis von V ergänzt werden. Das heißt, es gibt w_{i_1}, \dots, w_{i_r} , sodass $(v_1, \dots, v_k, w_{i_1}, \dots, w_{i_r})$ eine Basis von V ist.*

Beweis. Sei $U = \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ der von v_1, \dots, v_k aufgespannte Untervektorraum. Es ist also $U \subset V$.

1. Fall $U = V$: Dann ist v_1, \dots, v_k Erzeugendensystem von V und damit schon eine Basis (weil ja auch linear unabhängig).

2. Fall $U \neq V$: Dann gibt es ein w_{j_1} aus den Vektoren w_1, \dots, w_m mit $w_{j_1} \notin U$. Denn sonst wäre

$$w_1, \dots, w_m \in U \Rightarrow V = \text{span}(w_1, \dots, w_m) \subset U \Rightarrow U = V,$$

im Widerspruch zur Annahme $U \neq V$. Aus $w_{j_1} \notin U$ folgt nach Lemma 16.5.6, dass $(v_1, \dots, v_k, w_{j_1})$ linear unabhängig ist. Nehme dann w_{j_1} zu den Vektoren v_1, \dots, v_k hinzu, und wiederhole damit die Fallunterscheidung, also mit $U = \text{span}(v_1, \dots, v_k, w_{j_1})$ (so lange bis $U = V$).

□

Folgerung 16.6.5 Jedes Erzeugendensystem w_1, \dots, w_m enthält eine Basis. Das heißt, durch eventuelles Weglassen einiger der Vektoren w_j entsteht aus dem Erzeugendensystem eine Basis.

Beweis. Wähle ein $w_{j_1} \neq 0$ und setze $v_1 = w_{j_1}$. Somit ist (v_1) linear unabhängig. Basisergänzung von (v_1) mit dem Erzeugendensystem w_1, \dots, w_m liefert dann die Behauptung. □

Beispiel 16.6.6 Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

und die Standardeinheitsvektoren $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$. (v_1, v_2) ist linear unabhängig (Vektoren sind nicht Vielfache voneinander) und e_1, e_2, e_3 bilden ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^3 . Da $e_3 \notin \text{span}(v_1, v_2)$ (3. Komponente!), sind v_1, v_2 kein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^3 , d.h. noch keine Basis. Nach dem Basisergänzungssatz wissen wir nun, dass (v_1, v_2) durch Hinzunehmen von einem (oder mehreren) der Vektoren e_1, e_2, e_3 zu einer Basis von \mathbb{R}^3 wird. Wir untersuchen der Reihe nach, mit welchem der Vektoren das der Fall ist:

- (v_1, v_2, e_1) ist linear abhängig, denn

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1 \Rightarrow v_1 + v_2 - 2e_1 = 0.$$

- (v_1, v_2, e_2) ist linear abhängig, denn

$$v_1 - v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2e_2 \Rightarrow v_1 - v_2 + 2e_2 = 0.$$

- (v_1, v_2, e_3) ist linear unabhängig, da (v_1, v_2) linear unabhängig und $e_3 \notin \text{span}(v_1, v_2)$. (Anwendung von Lemma 16.5.6)

Hier kann man also nur den Vektor e_3 aus dem Erzeugendensystem zu v_1, v_2 hinzunehmen, sodass die Vektoren linear unabhängig bleiben. Sowohl e_1 als auch e_2 können dagegen nicht zu einer Basis mit v_1, v_2 gehören, da das System dann nicht mal linear unabhängig wäre. Also ist nach dem Basisergänzungssatz (v_1, v_2, e_3) eine Basis von \mathbb{R}^3 .

Wir kommen nun zur Definition der Dimension eines Vektorraums. Sie beruht darauf, dass für einen festen Vektorraum jede Basis aus derselben Anzahl von Vektoren besteht.

Satz 16.6.7 *Ist (v_1, \dots, v_n) eine Basis von V , so besteht auch jede andere Basis von V aus n Vektoren.*

Beweis. Angenommen (w_1, \dots, w_m) sei auch Basis von V und es wäre $m < n$. Wir betrachten das System (v_2, \dots, v_n) , lassen also den Vektor v_1 aus der Basis weg. Das System ist linear unabhängig und keine Basis von V mehr (denn $v_1 \notin \text{span}(v_2, \dots, v_n)$ da (v_1, \dots, v_n) linear unabhängig.) Wir machen nun eine Basisergänzung mit den Vektoren w_1, \dots, w_m als Erzeugendensystem und erhalten damit eine Basis

$$(v_2, \dots, v_n, w_{j_1}, \dots, w_{j_r}) \quad (r \geq 1)$$

von V . In dieser neuen Basis ersetzen wir jetzt genauso v_2 durch einen (oder mehrere) Vektoren w_j , dann auch v_3 , u.s.w. Nach insgesamt n Ersetzungen bekommen wir somit eine Basis der Form

$$(w_{j_1}, \dots, \dots, w_{j_l})$$

wobei $l \geq n$ gilt, denn bei jeder Ersetzungen kommt mindestens ein neues w_j hinzu. Wegen $m < n \leq l$ kommt in $(w_{j_1}, \dots, w_{j_l})$ mindestens einer der Vektoren w_j doppelt vor. Das System ist dann aber linear abhängig, also keine Basis, im Widerspruch zur Konstruktion. \square

Definition 16.6.8 Sei V ein Vektorraum. Die Anzahl der Vektoren in einer Basis von V heißt *Dimension* von V , geschrieben $\dim V$.

Aus der Dimension ergeben sich Bedingungen an die Anzahl von Vektoren, die ein linear unabhängiges bzw. ein Erzeugendensystem haben kann. Damit kann man auch einfacher überprüfen, ob ein System von Vektoren eine Basis.

Satz 16.6.9 *Sei $\dim V = n$.*

(a) *Sei (v_1, \dots, v_k) linear unabhängig. Dann gilt $k \leq n$ sowie*

$$(v_1, \dots, v_k) \text{ Basis} \Leftrightarrow k = n.$$

(b) *Sei v_1, \dots, v_m Erzeugendensystem. Dann gilt $m \geq n$ und*

$$(v_1, \dots, v_m) \text{ Basis} \Leftrightarrow m = n.$$

Eine Basis ist damit zugleich

- ein maximal linear unabhängiges System, und
- ein minimales Erzeugendensystem.

Beweis. (a) folgt aus dem Basisergänzungssatz (Ergänzung von (v_1, \dots, v_k) mit einer anderen Basis (w_1, \dots, w_n)), und (b) aus Folgerung 16.6.5. \square

Beispiel 16.6.10 (a) Die Standardbasis (e_1, \dots, e_n) von \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n besteht aus n Vektoren. Damit ist

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{C}^n = n. \quad (16.16)$$

(b) Bilden die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von \mathbb{R}^4 ? Man sieht einfach, dass das System (v_1, v_2, v_3, v_4) linear unabhängig ist, denn aus

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0$$

folgt nacheinander (betrachte die Vektor-Komponenten von oben nach unten!)

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0.$$

Es ist also ein linear unabhängiges System aus 4 Vektoren und $\dim \mathbb{R}^4 = 4$. Nach Satz 16.6.9 ist daher (v_1, \dots, v_4) eine Basis.

16.7 Untervektorräume und Dimension

Sei $U \subset V$ Untervektorraum des Vektorraums V . Dann ist U selbst ein Vektorraum, siehe den Beginn des Abschnitts 16.2 zu Untervektorräumen. Damit sind die Begriffe Basis und Dimension auch für Untervektorräume wohldefiniert. Wir schreiben es hier trotzdem noch einmal explizit auf:

Die Vektoren $v_1, \dots, v_k \in U$ bilden eine Basis von U genau dann, wenn

- (i) (v_1, \dots, v_k) linear unabhängig,
- (ii) v_1, \dots, v_k Erzeugendensystem von U , das heißt $U = \text{span}(v_1, \dots, v_k)$.

Ist (v_1, \dots, v_k) eine Basis von U , so gilt $\dim U = k$.

Satz 16.7.1 *Ist U ein Untervektorraum von V , so gilt $\dim U \leq \dim V$ sowie*

$$U = V \quad \Leftrightarrow \quad \dim U = \dim V.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 16.6.9(a), wobei für (v_1, \dots, v_k) eine Basis von U gewählt wird, d.h. $k = \dim U$. Beachte noch: ist (v_1, \dots, v_k) Basis von U und V , so folgt $U = \text{span}(v_1, \dots, v_k) = V$. \square

Bemerkung: Wir betrachten nochmal den Fall von Unterräumen, die von einem oder zwei Vektoren in \mathbb{R}^3 aufgespannt werden, vergleiche das Ende von Abschnitt 16.3.

- (a) Sei
- $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
- . Dann ist der Untervektorraum

$$U = \text{span}(v) = \{x = \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

eine Gerade durch den Nullpunkt. Das System (v) ist linear unabhängig (da $v \neq 0$) und es gilt $U = \text{span}(v)$. Damit ist (v) eine Basis von U . Es folgt daher $\dim U = 1$.

- (b) Seien
- $v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
- und
- $v \neq \lambda w$
- .

$$U = \text{span}(v, w) = \{x = \lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

ist dann eine Ebene durch den Nullpunkt. Da (v, w) linear unabhängig ist (wegen $v \neq \lambda w, v, w \neq 0$) und $U = \text{span}(v, w)$, ist (v, w) eine Basis von U und somit $\dim U = 2$.

- (c) Man kann dieses Schema auch allgemein formulieren: Sei
- (v_1, \dots, v_k)
- ein linear unabhängiges System von Vektoren eines Vektorraumes
- V
- . Dann hat der Untervektorraum

$$U = \text{span}(v_1, \dots, v_k)$$

die Basis (v_1, \dots, v_k) , und es gilt $\dim U = k$.

Ist allerdings (v_1, \dots, v_k) nicht unbedingt linear unabhängig, so gilt nur $\dim U \leq k$. Das folgt aus Satz 16.6.9(b) da v_1, \dots, v_k ein Erzeugendensystem von U ist.

- (d) Sei
- $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
- ,
- $b \in \mathbb{K}^m$
- , und das Gleichungssystem
- $Ax = b$
- sei lösbar. Sei

$$x = x_0 + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$$

die allgemeine Lösung von $Ax = b$ nach dem Gaußalgorithmus, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die freien Parametern, $k = n - r$, und r der Rang des Gleichungssystems. Dann ist (u_1, \dots, u_k) eine Basis von $\text{Kern } A$ und $\dim \text{Kern } A = k$, d.h.

$$\dim \text{Kern } A = n - r \quad (r = \text{Rang}). \quad (16.17)$$

Denn es gilt $\text{Kern } A = \text{span}(u_1, \dots, u_k)$, und aus der Konstruktion im Gaußalgorithmus folgt, dass (u_1, \dots, u_k) linear unabhängig ist. Vergleiche dazu nochmal Beispiel 16.4.2(d) und die anschließende Bemerkung.

Beispiel 16.7.2 Sei U der Untervektorraum, der aufgespannt wird von

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h. $U = \text{span}(v_1, v_2, v_3)$. Wir wollen die Dimension und eine Basis von U berechnen. Wir gehen schrittweise vor:

- (i)
- (v_1, v_2)
- ist linear unabhängig (da
- $v_1, v_2 \neq 0, v_1 \neq \lambda v_2$
-). Also ist
- $\dim U \geq 2$
- . (Satz 16.6.9(a))

- (ii) v_1, v_2, v_3 ist ein Erzeugendensystem von U , also gilt $\dim U \leq 3$ (wegen Satz 16.6.9(b)). Nach Folgerung 16.6.5 enthält außerdem v_1, v_2, v_3 eine Basis von U .
- (iii) Da v_1, v_2, v_3 ein Erzeugendensystem von U ist, gilt

$$\dim U = 3 \Leftrightarrow (v_1, v_2, v_3) \text{ Basis} \Leftrightarrow (v_1, v_2, v_3) \text{ linear unabhängig.}$$

Wir prüfen (v_1, v_2, v_3) auf lineare Unabhängigkeit:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) +2I \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -9 & 0 \end{array} \right) \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Es folgt $\text{Rang} = 2 < 3$, somit ist (v_1, v_2, v_3) linear abhängig (siehe Lemma 16.5.2). Also gilt $\dim U \neq 3$, und damit $\dim U = 2$.

- (iv) Aus $\dim U = 2$ folgt nun, dass (v_1, v_2) eine Basis von U ist, da (v_1, v_2) linear unabhängig. Da (v_1, v_3) und (v_2, v_3) ebenfalls linear unabhängig sind, sind auch (v_1, v_3) und (v_2, v_3) Basen von U .

Zum Abschluss noch zwei allgemeine Bemerkungen zur Dimension:

Bemerkung:

- (a) Der Untervektorraum $U = \{0\}$ hat die Dimension $\dim U = 0$. (Dies entspricht einer Basis, die keinen Vektor enthält.³)
- (2) Es gibt Vektorräume mit unendlicher Dimension, $\dim V = \infty$. Ein solcher Vektorraum
- hat keine endliche Basis;
 - hat beliebig große linear unabhängige Systeme (v_1, \dots, v_k) (das heißt, k kann beliebig groß sein.)

Ein Beispiel für einen unendlich-dimensionalen Vektorraum ist der Raum der Polynome beliebig hohen Grades,

$$P = \{p \mid p \text{ Polynom mit beliebigem Grad}\}.$$

P enthält alle Monome $m_k(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$. Das System (m_0, m_1, \dots, m_n) der Monome bis zum Grad n ist linear unabhängig, denn

$$\begin{aligned} & \alpha_0 m_0 + \alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_n m_n = 0 \\ \Rightarrow & \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow & \alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

P enthält also ein linear unabhängiges System aus $n + 1$ Vektoren, daher muss $\dim P \geq n + 1$ gelten. Da aber $n \in \mathbb{N}$ beliebig groß sein kann, folgt $\dim P = \infty$.

³Selbst für Mathematiker ist das ein gewöhnungsbedürftiges Konzept!

Für den Vektorraum der Polynom vom Grad maximal n ,

$$P_n = \{p \mid p \text{ Polynom, Grad } p \leq n\},$$

ist dagegen $\dim P_n = n + 1$, denn (m_0, m_1, \dots, m_n) ist eine Basis (vergleiche Beispiel 16.4.2(c)).

16.8 Orthonormalbasen

Orthonormalbasen sind Basen des \mathbb{R}^n mit der zusätzlichen Eigenschaft der Orthonormalität. Sie vereinfacht viele Rechnungen, zum Beispiel das Überprüfen der linearen Unabhängigkeit oder die Berechnung der Basisdarstellung eines Vektors.

Orthonormalität wird über das Skalarprodukt im \mathbb{R}^n definiert. Zur Erinnerung: das Skalarprodukt zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Für die Eigenschaften des Skalarprodukts siehe Abschnitt 7.6.

Definition 16.8.1 Seien $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Das System (v_1, \dots, v_k) heißt

- (a) *orthogonal*, wenn $v_i \perp v_j$ für alle $i \neq j$, das heißt wenn

$$v_i \cdot v_j = 0 \quad \text{für alle } i \neq j;$$

- (b) *orthonormal*, wenn es orthogonal ist und zusätzlich $|v_i| = 1$ gilt, d.h. alle v_i sind auf Länge Eins normiert (also Einheitsvektoren).

Weil $|v_i|^2 = v_i \cdot v_i$ ist, ist (v_1, \dots, v_k) orthonormal, genau dann wenn

$$\begin{aligned} v_i \cdot v_j &= 0 \quad \text{für alle } i \neq j, \quad \text{und} \\ v_i \cdot v_i &= 1 \quad \text{für alle } i. \end{aligned}$$

Eine *Orthonormalbasis* von \mathbb{R}^n ist eine Basis (v_1, \dots, v_n) des \mathbb{R}^n , die orthonormal ist. Entsprechend ist (v_1, \dots, v_k) eine Orthonormalbasis des Untervektorraums $U \subset \mathbb{R}^n$, wenn (v_1, \dots, v_k) orthonormal und Basis von U ist.

Orthogonalität impliziert lineare Unabhängigkeit und macht damit auch die Überprüfung der Basiseigenschaft einfach:

Satz 16.8.2 Seien $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ und alle $v_i \neq 0$.

- (a) Ist (v_1, \dots, v_k) orthogonal, so ist (v_1, \dots, v_k) linear unabhängig.
- (b) Ist (v_1, \dots, v_k) orthonormal, dann ist (v_1, \dots, v_k) eine Orthonormalbasis von $U = \text{span}(v_1, \dots, v_k)$.

Beweis. Sei (v_1, \dots, v_k) orthogonal und

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0.$$

Wir bilden das Skalarprodukt mit v_i und erhalten

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) \cdot v_i = 0 \\ \Rightarrow & \alpha_1 \underbrace{v_1 \cdot v_i}_0 + \dots + \alpha_i \underbrace{v_i \cdot v_i}_{|v_i|^2} + \dots + \alpha_n \underbrace{v_n \cdot v_i}_0 = 0 \\ \Rightarrow & \alpha_i |v_i|^2 = 0, \end{aligned}$$

denn $v_j \cdot v_i = 0$ für $j \neq i$. Wegen $v_i \neq 0$ ist $|v_i| \neq 0$ und somit folgt $\alpha_i = 0$. Weil $i \in \{1, \dots, k\}$ beliebig war, ist damit $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, d.h. (v_1, \dots, v_k) ist linear unabhängig. Teil (b) ist nun trivial, denn (v_1, \dots, v_k) ist per Definition ein Erzeugendensystem von $U = \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ und linear unabhängig nach (a). Also ist es eine Basis von U . \square

Der nächste Satz besagt, dass sich für eine Orthonormalbasis die Koeffizienten der Basisdarstellung einfach durch Skalarprodukte berechnen lassen. Bei einer allgemeinen Basis ist dafür in der Regel ein Gleichungssystem zu lösen (siehe Beispiel 16.6.3(b)), was aufwändiger ist.

Satz 16.8.3 Sei (v_1, \dots, v_k) eine Orthonormalbasis des Untervektorraums $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind die Koeffizienten in der Basisdarstellung

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \quad (16.18)$$

von $x \in U$ gegeben durch

$$\lambda_i = x \cdot v_i. \quad (16.19)$$

Beweis. Da (v_1, \dots, v_k) eine Basis von U ist, hat $x \in U$ eine Basisdarstellung (16.18) mit Koeffizienten $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Durch bilden des Skalarprodukts von (16.18) mit x_i folgt

$$x \cdot v_i = \lambda_1 \underbrace{v_1 \cdot v_i}_0 + \dots + \lambda_i \underbrace{v_i \cdot v_i}_1 + \dots + \lambda_k \underbrace{v_k \cdot v_i}_0 = \lambda_i.$$

\square

Beispiel 16.8.4 (a) Die Standardbasis (e_1, \dots, e_n) des \mathbb{R}^n ist eine Orthonormalbasis, denn es gilt offensichtlich $e_i \cdot e_j = 0$ für $i \neq j$ und $|e_i| = 1$.

(b) Wir betrachten folgende Vektoren in \mathbb{R}^3 :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir rechnen nach, dass (v_1, v_2, v_3) orthonormal ist:

$$v_1 \cdot v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{12}} (1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2) = 0$$

$$v_1 \cdot v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} (1 - 1 + 0) = 0$$

$$v_2 \cdot v_3 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{18}} (1 + 1 - 2) = 0$$

Die Vektoren sind also paarweise orthogonal. Jetzt berechnen wir die Länge:

$$|v_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1$$

$$|v_2| = \frac{1}{\sqrt{6}} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{1 + 1 + 4} = 1$$

$$|v_3| = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 1 + 1} = 1$$

Die Vektoren sind somit auch auf Länge Eins normiert und daher orthonormal. Das System ist damit nach Satz 16.8.2(a) linear unabhängig, und es besteht aus drei Vektoren; aus $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ folgt somit das (v_1, v_2, v_3) eine Basis und daher eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 ist.

Wir betrachten jetzt den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

und berechnen seine Darstellung in der Orthonormalbasis (v_1, v_2, v_3) . Die Koeffizienten sind nach (16.19)

$$\lambda_1 = x \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (3 - 1 + 0) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\lambda_2 = x \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3 + 1 + 14}{\sqrt{6}} = \frac{18}{\sqrt{6}} = \frac{3 \cdot 6}{\sqrt{6}} = 3\sqrt{6}$$

$$\lambda_3 = x \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{3 + 1 - 7}{\sqrt{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

und somit gilt

$$x = \sqrt{2} v_1 + 3\sqrt{6} v_2 - \sqrt{3} v_3.$$

16.9 Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt

Mit dem Gram-Schmidt-Verfahren wird aus gegebenen Vektoren $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ schrittweise ein Orthonormalsystem (u_1, \dots, u_m) berechnet.

Gram-Schmidt-Verfahren. Seien $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Berechne dann rekursiv Vektoren u_i wie folgt:

1. Start

$$u_1 = \frac{1}{|v_1|} v_1$$

2. Rekursion

Wurden u_1, \dots, u_k schon berechnet, dann

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{k+1} &= v_{k+1} - (v_{k+1} \cdot u_1)u_1 - \dots - (v_{k+1} \cdot u_k)u_k & (16.20) \\ u_{k+1} &= \frac{1}{|\tilde{u}_{k+1}|} \tilde{u}_{k+1} & (\text{vorausgesetzt } \tilde{u}_{k+1} \neq 0) \end{aligned}$$

Die so berechneten Vektoren u_1, \dots, u_m bilden dann ein Orthonormalsystem.

Beweis. Wir zeigen, dass (u_1, \dots, u_m) orthonormal ist. Alle u_i sind nach Konstruktion auf Eins normiert:

$$|u_1| = \frac{1}{|v_1|} |v_1| = 1, \quad |u_{k+1}| = \frac{1}{|\tilde{u}_{k+1}|} |\tilde{u}_{k+1}| = 1.$$

Die Orthogonalität folgt aus (16.20) dann schrittweise. Zunächst ist

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2 &= v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1 \\ \Rightarrow \tilde{u}_2 \cdot u_1 &= v_2 \cdot u_1 - (v_2 \cdot u_1) \underbrace{u_1 \cdot u_1}_1 = 0 \\ \Rightarrow u_2 \cdot u_1 &= \frac{1}{|\tilde{u}_2|} \tilde{u}_2 \cdot u_1 = 0 \end{aligned}$$

Ist die paarweise Orthogonalität dann schon für u_1, \dots, u_k für ein $k \geq 2$ gezeigt, so gilt für $1 \leq j \leq k$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{k+1} \cdot u_j &= v_{k+1} \cdot u_j - (v_{k+1} \cdot u_1) \underbrace{u_1 \cdot u_j}_0 - \dots - (v_{k+1} \cdot u_j) \underbrace{u_j \cdot u_j}_1 - \\ &\quad \dots - (v_{k+1} \cdot u_k) \underbrace{u_k \cdot u_j}_0 \\ &= v_{k+1} \cdot u_j - v_{k+1} \cdot u_j = 0, \end{aligned}$$

also auch $u_{k+1} \cdot u_j = 0$, d.h. u_{k+1} ist ebenfalls orthogonal zu u_1, \dots, u_k . Dies wendet man nacheinander für $k = 2, \dots, m-1$ an und erhält so schließlich die Orthogonalität von (u_1, \dots, u_m) . \square

Beachte: Damit das Gram-Schmidt-Verfahren bis zum letzten Vektor u_m durchlaufen kann, muss in jedem Rekursionsschritt $\tilde{u}_{k+1} \neq 0$ gelten. (Denn sonst

würde bei der Normierung durch Null geteilt!) Wenn in (16.20) der Fall $\tilde{u}_{k+1} = 0$ auftritt, so ist

$$v_{k+1} = (v_{k+1} \cdot u_1)u_1 + \cdots + (v_{k+1} \cdot u_k)u_k.$$

Da $u_1, \dots, u_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ gilt (denn jedes u_i entsteht durch Linearkombinationen aus den bis dahin benutzten Vektoren v_1, \dots, v_i), folgt dann $v_{k+1} \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$, d.h. (v_1, \dots, v_{k+1}) wäre linear abhängig. Wenn also (v_1, \dots, v_m) linear unabhängig ist, so gilt immer $\tilde{u}_{k+1} \neq 0$.

Andererseits kann man das Gram-Schmidt-Verfahren auch dann anwenden, wenn die lineare Unabhängigkeit von (v_1, \dots, v_m) nicht bekannt ist. Im Fall $\tilde{u}_{k+1} = 0$ lässt man dann den Vektor v_{k+1} einfach weg und fährt mit v_{k+2} fort. Denn bei $\tilde{u}_{k+1} = 0$ gilt ja $v_{k+1} \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ und damit

$$\text{span}(v_1, \dots, v_m) = \text{span}(v_1, \dots, v_k, v_{k+2}, \dots, v_m).$$

D.h. nach Weglassen von v_k erzeugen die verbleibenden Vektoren v_i ($i \neq k$) immernoch denselben Untervektorraum. Nach Weglassen von v_{k+1} berechnet man somit aus den Vektoren $v_1, \dots, v_k, v_{k+2}, \dots, v_m$ ein Orthonormalsystem u_1, \dots, u_{m-1} (d.h. ein Vektor weniger).

Wir bezeichnen jetzt die Vektoren, die nach dem eventuell nötigen Weglassen einiger v_i noch übrig sind, wieder mit v_1, \dots, v_m . Im Gram-Schmidt-Verfahren ist jetzt also immer $\tilde{u}_{k+1} \neq 0$. Dann gilt:

Satz 16.9.1 *Ist im Gram-Schmidt-Verfahren $\tilde{u}_{k+1} \neq 0$ ($k = 1, \dots, m-1$), so ist (v_1, \dots, v_m) linear unabhängig. (u_1, \dots, u_m) ist dann eine Orthonormalbasis von $U = \text{span}(v_1, \dots, v_m)$.*

Beweis. Wegen $u_1, \dots, u_m \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ (siehe oben) ist (u_1, \dots, u_m) ein Orthonormalsystem in U , also insbesondere linear unabhängig. Daher gilt $\dim U \geq m$. Andererseits ist v_1, \dots, v_m ein Erzeugendensystem von U , also $\dim U \leq m$. Daher ist $\dim U = m$, und es folgt, dass (u_1, \dots, u_m) eine Basis von U ist. Weiter ist dann auch (v_1, \dots, v_m) Basis von U , also insbesondere linear unabhängig. \square

Beispiel 16.9.2 Wir berechnen mit dem Gram-Schmidt-Verfahren ein Orthonormalsystem aus den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Im ersten Schritt wird v_1 auf Länge Eins normiert:

$$u_1 = \frac{1}{|v_1|}v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt berechnen wir \tilde{u}_2 gemäß (16.20) aus v_2 und dem schon berechneten u_1 :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_2 &= v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-4}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Durch Normierung erhalten wir daraus u_2 :

$$|\tilde{u}_2| = \frac{2}{3} \sqrt{1+1+4} = \frac{2}{3} \sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{1}{|\tilde{u}_2|} \tilde{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Entsprechend berechnen wir jetzt u_3 aus v_3 und u_1, u_2 :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_3 &= v_3 - (v_3 \cdot u_1)u_1 - (v_3 \cdot u_2)u_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\tilde{u}_3| = \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ \Rightarrow \quad u_3 &= \frac{1}{|\tilde{u}_3|} \tilde{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Wir erhalten das Orthonormalsystem (u_1, u_2, u_3) . Da das Orthonormalsystem aus 3 Vektoren besteht und $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ ist, folgt hier, dass (u_1, u_2, u_3) eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 ist.

Eine abschließende Bemerkung zu Orthonormalsystemen und -basen in anderen Vektorräumen:

Bemerkung:

- (a) Man verwendet (gerade im Zusammenhang mit Orthonormalsystemen) auch folgende Schreibweise für das Skalarprodukt:

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y$$

- (b) Im komplexen Vektorraum \mathbb{C}^n kann man ebenfalls ein Skalarprodukt definieren:

$$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n \quad \text{für} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

(Beachte die komplexe Konjugation bei den Komponenten von y im Produkt!) Dieses Skalarprodukt hat dann (im Wesentlichen) dieselben Eigenschaften wie das Skalarprodukt vom \mathbb{R}^n , und Orthonormalsysteme und -basen werden genauso definiert. Auch das Gram-Schmidt-Verfahren funktioniert unverändert.

- (c) Auch in anderen Vektorräumen gibt es Skalarprodukte und damit wieder Orthonormalsysteme und -basen sowie das Gram-Schmidt-Verfahren. Ein Beispiel ist das Skalarprodukt in den Vektorräumen der komplexwertigen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ beziehungsweise $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$. (Das Skalarprodukt wird in diesem Fall über ein Integral definiert!) Orthonormalsystem von solchen Funktionen spielen eine wichtige Rolle bei Fourierreihen (Thema in Mathematik C) und in der Quantenmechanik.

Kapitel 17

Der Rang einer Matrix

Der Rang spielt bei der Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ eine sehr wichtige Rolle; er bestimmt zum Beispiel die Anzahl freier Parameter der Lösung. Tatsächlich ist der Rang eine Eigenschaft der Matrix A selbst.

17.1 Zeilenrang und Spaltenrang

Um zu sehen, dass der Rang eine wohldefinierte Eigenschaft der Matrix selbst ist, betrachten wir zunächst den Zeilen- und Spaltenrang. Wir werden dann sehen, dass beide gleich sind.

Definition 17.1.1 Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist der

- *Spaltenrang* die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A ;
- *Zeilenrang* die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren.

Anders gesagt: Sind s_1, \dots, s_n die Spaltenvektoren von A und z_1, \dots, z_m die Zeilenvektoren, dann gilt

$$\begin{aligned}\text{Spaltenrang} &= \dim \text{span}(s_1, \dots, s_n) \\ \text{Zeilenrang} &= \dim \text{span}(z_1, \dots, z_m)\end{aligned}$$

(denn $\dim \text{span}(s_1, \dots, s_n)$ ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren von s_1, \dots, s_n , vergleiche Satz 16.6.9.)

Satz 17.1.2 *Zeilen- und Spaltenrang bleiben bei elementaren Zeilenumformungen gleich.*

Beweis.

- (a) $\text{span}(z_1, \dots, z_m)$ bleibt bei Zeilenumformungen gleich: Das ist klar für das Vertauschen zweier Zeilen, und für die Multiplikation von z_i mit $\alpha \neq 0$, also $z_i \rightarrow \alpha z_i$, folgt das aus Satz 16.4.3(a). Für die Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen, $z_i \rightarrow z'_i = z_i + \alpha z_j$, gilt nach Satz 16.4.3(b):

$$\begin{aligned}\text{span}(z_1, \dots, z_i, \dots, z_m) &= \text{span}(z_1, \dots, z_i, z'_i, \dots, z_m) \\ &= \text{span}(z_1, \dots, z'_i, \dots, z_m)\end{aligned}$$

da $z'_i \in \text{span}(z_1, \dots, z_m)$ und $z_i = z'_i - \alpha z_j \in \text{span}(z_1, \dots, z'_i, \dots, z_m)$.

- (b) Seien s_{j_1}, \dots, s_{j_k} einige der Spalten von A , und sei A' die $m \times k$ -Matrix mit genau diesen Spalten. $(s_{j_1}, \dots, s_{j_k})$ ist damit linear unabhängig, genau dann wenn $A'\alpha = 0$ nur die triviale Lösung $\alpha = 0$ hat. Zeilenumformungen von A entsprechen nun Zeilenumformungen von A' , und dabei ändert sich die Lösungsmenge von $A'\alpha = 0$ nicht. Somit bleibt der Spaltenrang unverändert.

□

Folgerung 17.1.3 Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Dann sind Zeilenrang und Spaltenrang von A gleich, und gleich dem Rang bei Umformung von A auf Zeilen-Stufenform.

Beweis. Bei der Umformung auf Zeilen-Stufenform bleibt nach dem letzten Satz Zeilen- und Spaltenrang unverändert. In der Zeilen-Stufenform ist aber offenbar der Zeilen- und der Spaltenrang gleich r , der Anzahl der Zeilen ungleich Null, also dem Rang der Zeilen-Stufenform, siehe (6.4). □

Definition 17.1.4 Für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ heißt

$$\text{Rang } A = \text{Zeilenrang von } A = \text{Spaltenrang von } A$$

der Rang der Matrix A .

Folgerung 17.1.5 Für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt:

- (a) $\text{Rang } A \leq m$ und $\text{Rang } A \leq n$
 (b) $\text{Rang } A = \text{Rang } A^\top$
 (c) Der Rang bleibt bei elementaren Spaltenumformungen unverändert, also bei
- Addition des Vielfachen einer Spalte zu einer anderen
 - Multiplikation einer Spalte mit einer Zahl $\alpha \neq 0$
 - Vertauschen von Spalten

Beweis. Für (a) ist zum Beispiel

$$\text{Rang } A = \text{Zeilenrang} = \dim \text{span}(z_1, \dots, z_m) \leq m.$$

(b) und (c) folgen daraus, dass die Spalten von A gleich den Zeilen von A^\top sind. □

Beispiel 17.1.6 (a) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ist $\text{Rang } A = 2$, denn offenbar sind die Spalten von A linear unabhängig, d.h. der Spaltenrang ist 2.

(b) Wir berechnen den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (17.1)$$

durch Umformung auf Zeilen-Stufenform:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} &\begin{array}{l} -2\text{I} \\ +\text{I} \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} +4\text{II} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit ist $\text{Rang } A = 2$.

17.2 Der Rangsatz

Die Aussage des Rangsatzes hatten wir schon in der Bemerkung auf Seite 266, Teil (d), Gleichung (16.17). Wir können es aber erst jetzt mit dem Begriff des Rangs der Matrix wirklich schön formulieren:

Satz 17.2.1 (Rangsatz) Für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt

$$\text{Rang } A + \dim \text{Kern } A = n. \quad (17.2)$$

Der Rangsatz fasst sehr gut die Struktur der Lösung des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ zusammen mit den Begriffen von Rang, Dimension und Kern. Beachte nochmal:

- Rang A ist gleich dem Rang r in der Zeilen-Stufenform von A .
- Kern A ist der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$.
- $\dim \text{Kern } A$ ist gleich der Anzahl Basisvektoren u_1, \dots, u_k von Kern A , also gleich der Anzahl der freien Parameter $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.
- Die allgemeine Lösung in Kern A ist

$$x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$$

und es gilt $k = n - r$, also

$$\dim \text{Kern } A = n - \text{Rang } A \quad \Leftrightarrow \quad \text{Rang } A + \dim \text{Kern } A = n.$$

Beispiel 17.2.2 Für die Matrix des letzten Beispiels $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ aus (17.1) hatten wir $\text{Rang } A = 2$ berechnet. Somit ist nach dem Rangsatz

$$\dim \text{Kern } A = n - \text{Rang } A = 4 - 2 = 2,$$

und das ist die Anzahl der freien Parameter bei der Lösung von $Ax = 0$.